Московский Автомобильно-Дорожный
Государственный Технический Университет
(МАДИ)

Утверждено на заседании кафедры
высшей математики 13.12.2010
Подписано в печать 25.01.2011

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
(МАДИ)

Расчетно-графическая работа 2.2

по высшей математике

для студентов 1-го курса
(второй семестр)

Определенные интегралы и функции многих переменных

Москва 2013

Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет (МАДИ)
Кафедра высшей математики

Расчетно-графическая работа 2.1

по высшей математике

для студентов 1-го курса
(второй семестр)

Определенные интегралы и функции многих переменных

Издание третье

Москва
2013

Составители:

Давыдов Е.Г., Изотова С.А., Коробов В.А., Чернов Д.Э.

Требования к выполнению и оформлению расчётно-графических работ

При выполнении РГР необходимо придерживаться указанных ниже правил. Если будет установлено, что работы выполнены без соблюдения этих правил, то они не будут зачтены.

1. Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 3–4 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер РГР, номер варианта, название дисциплины, номер учебной группы. В конце работы следует проставить дату её выполнения и расписаться.

3. Решения задач должны быть представлены в том же порядке, как они указаны в брошюре РГР.

4. Расчётно-графические работы, содержащие задачи не своего варианта, возвращаются студентам для выполнения своих заданий.

5. Перед решением каждой задачи студент обязан указать номер задачи и полностью выписать её условия. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

6. Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно и чётко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа.

7. В случае незачёта студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

8. После рецензирования студенты защищают расчётно-графические работы и представляют их на экзамене.

Методические указания к расчетно-графической работе 2.2. Определенные интегралы и функции многих переменных

1. Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке (задание 1)

Средним значением функции $y = f(x)$ на промежутке $[a, b]$ называется величина

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$.

Геометрический смысл среднего значения функции заключается в следующем. Если $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$, равна площади прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$. (см. рис. 1)

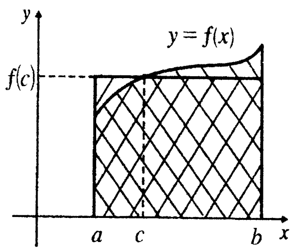

Рис. 1

Пример 1. Найти среднее значение функции $y = 5x^4 - 2$ на промежутке [1,2].

Решение.

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-1}\int\limits_1^2 (5x^4 - 2)dx = (x^5 - 2x)|_1^2 = 29.$$

2. Точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, заданной интегралом с переменным верхним пределом (задание 2)

Функция $\Phi(x)$ дана в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Если функция f непрерывна в точке x, то $\Phi'(x) = f(x)$ (обратите внимание, что теперь аргументом функции f является уже переменная x, а не t). Соответственно $\Phi''(x) = f'(x)$.

Теперь чтобы найти точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, остается лишь вспомнить первый семестр и разыскать заброшенные куда-то расчетки (те, что по исследованию функций, построению графиков и т.д.)

Заметим лишь, что для поиска координат y (ординат) найденных точек потребуется все же проинтегрировать функцию $f(t)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(t)|_a^x = F(x) - F(a),$$

где F некоторая первообразная для функции f.

Пример 2. $\Phi(x) = \int_1^x (t - t^3)dt$.

Решение. Нетрудно найти

$$\Phi'(x) = f(x) = x - x^3 = x(1 - x^2), \quad \Phi''(x) = 1 - 3x^2,$$

а также

$$\Phi(x) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}.$$

Тогда $\Phi'(x) = 0$ при $x = 0, x = 1$ и $x = -1$ (критические точки). Так как $\Phi''(0) = 1 > 0$, $\Phi''(\pm 1) = -2 < 0$, то согласно вторым достаточным условиям существования экстремума при $x = 0$ функция $\Phi(x)$ имеет минимум, а при $x = \pm 1$ — максимум (можно использовать также первые достаточные условия — определить, как меняется знак производной при переходе через каждую критическую точку). Таким образом, точка $(0; -\frac{1}{4})$ — точка минимума, а точки $(\pm 1; 0)$ — точки максимума (для вычисления координат y этих точек использовано полученное выше явное выражение для функции $\Phi(x)$).

Из уравнения $\Phi''(x) = 1 - 3x^2 = 0$ получаем точки перегиба: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (как нетрудно убедиться, функция $\Phi''(x)$ в этих точках меняет знак). Ординаты для найденных точек перегиба предлагаем Вам найти самостоятельно.

3. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь (задания 3 и 4)

Прежде всего необходимо нанести на рисунок все указанные линии, найти точки их пересечения и определить, площадь какой фигуры следует найти. Некоторые варианты получающихся рисунков приведены на рис. 2 (для линий, заданных в декартовых координатах).

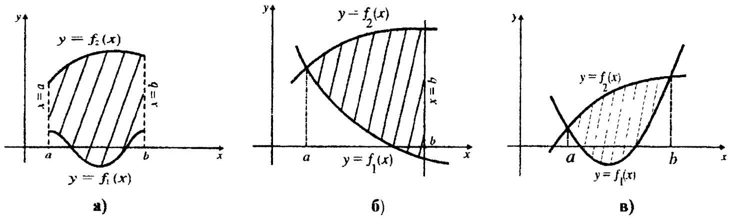

Рис. 2

Во всех приведенных (и аналогичных) случаях площадь фигуры определяется с помощью интеграла:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

где $y = f_2(x)$ — "верхняя" линия, а $y = f_1(x)$ — "нижняя", т.е. $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $x \in [a, b]$.

Если линии заданы в полярной системе координат (уравнения таких линий имеют вид $r = r(\varphi)$ или $\varphi = \varphi_0$, а связь полярных координат с декартовыми: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$), то все аналогично. При этом следует помнить, что всегда $r \geq 0$, а линия $\varphi = \varphi_0$ представляет собой луч, выходящий из начала координат и составляющий с положительным направлением оси Ox угол φ_0 (отсчет — против часовой стрелки). Некоторые варианты областей в этом случае приведены на рис. 3.

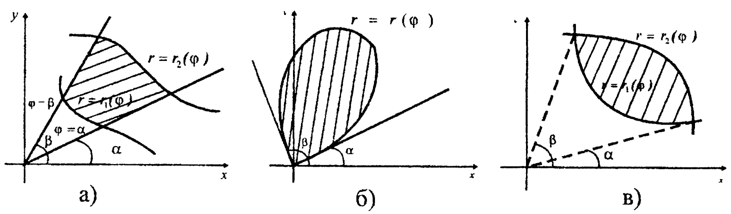

Рис. 3

Для случаев а) и в) площадь фигуры определяется с помощью интеграла

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi))d\varphi,$$

а для случая б) — с помощью интеграла

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Заметим, что если в результате вычислений получилось $S < 0$, то необходимо найти ошибку, так как всегда площадь $S \geq 0$.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^2/2 + 1$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых:

$x^2 = x^2/2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ — абсциссы точек пересечения.

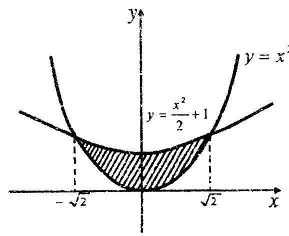

Рис. 4

Нанесем заданные кривые на рис. 4 и определим фигуру, площадь которой требуется найти. Согласно сказанному выше из чертежа получаем, что

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2/2 + 1 - x^2)dx =$$

$$= (x - x^3/6)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Пример 4. Найти площадь одного лепестка фигуры, ограниченной кривой $r = a\sqrt{\sin 4\varphi}$, $(a > 0)$.

Решение. Найдем область определения функции $r(\varphi)$:

$\sin 4\varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi n \leq 4\varphi \leq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Взяв один лепесток ($n = 0$), получим $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Этот лепесток изображен на рис. 5.

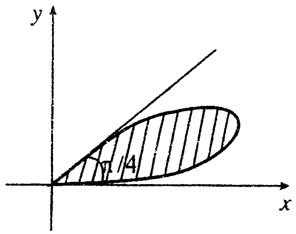

Рис. 5

Найдем теперь его площадь:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2\sin 4\varphi d\varphi=-\frac{1}{2}a^2\frac{1}{4}\cos 4\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{4}.$$

В завершение раздела заметим, что если верхняя или (и) нижняя линия не имеет одинакового выражения на $[a,b]$ (например, если линия $f_2(x)$ составлена из двух линий $f_{21}(x)$ и $f_{22}(x)$), то для преодоления этой неприятности следует область разбить на две или большее число областей, взять для каждой свой интеграл, а затем результаты просуммировать. То же самое относится и к линиям в полярных координатах, а также к последующим разделам, связанным с приложениями определенного интеграла.

4. Объем тела вращения вокруг осей Ox, Oy (задание 5)

Этот раздел практически повторяет предыдущий (когда кривые заданы в декартовых координатах), только интеграл для определения объема будет иметь следующий вид:

$$V_x=\pi\int\limits_a^b(f_2^2(x)-f_1^2(x))dx,$$

если вокруг оси Ox вращается фигура типа изображенной на рис. 2 (но только при $f_2(x)\geq f_1(x)\geq 0$).

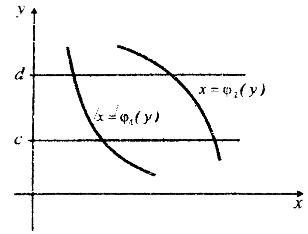

Рис. 6

Если фигура вращается вокруг оси Oy, то все аналогично: например, для фигуры, изображенной на рис. 6 (уравнения кривых должны быть представлены в виде $x=\varphi(y)$, а не $y=f(x)$!), интеграл запишется так:

$$V_y=\pi\int\limits_c^d(\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y))dy.$$

Пример 5. Найти объемы тел вращения фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=x^2/2+1$ и $x=0$, относительно осей Ox и Oy.

Решение. Изобразим фигуру на рис. 7 (см. также пример 3).

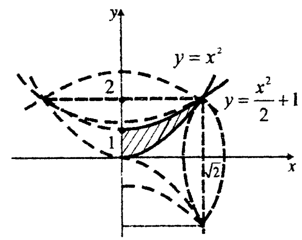

Рис. 7

Для первого объема сразу можно записать

$$V_x=\pi\int\limits_a^b(f_2^2(x)-f_1^2(x))dx=\pi\int\limits_0^{\sqrt2}((x^2/2+1)^2-x^4)dx=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\sqrt2}\left(x^2+1-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\pi(\frac{x^3}{3}+x-\frac{3}{20}x^5)\Big|_0^{\sqrt2}=$$

$$=\pi\left(\frac{2\sqrt2}{3}+\sqrt2-\frac{3}{20}4\sqrt2\right)=\frac{16\sqrt2\pi}{15}.$$

Чтобы найти второй объем, необходимо прежде всего выразить в уравнениях кривых переменную x (или сразу x^2) через y:

$$y = x^2 \Rightarrow x^2 = y, \qquad y = \frac{x^2}{2} + 1 \Rightarrow x^2 = 2(y-1).$$

Глядя на рис. 7, мы видим, что кривая $\varphi_1(y)$ на отрезке $[0;2]$ не имеет единого выражения: на $[0;1]$ имеем $\varphi_1(y) = 0$, а на $[1;2]$ будет $\varphi_1(y) = \sqrt{2(y-1)}$. Поэтому для поиска V_y потребуется записать два интеграла:

$$V_y = \pi \int\limits_0^1 (y-0)dy + \pi \int\limits_1^2 (y - 2(y-1))dy.$$

Эти интегралы вычисляются элементарно.

5. Длина дуги кривой (задания 6 и 8)

Вычисление длины дуги кривой, заданной в декартовых или полярных координатах, по сути не отличается от вычисления площади криволинейной трапеции (см. задания 3, 4), только интегралы имеют соответственно вид

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \quad \text{и} \quad l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Если же кривая задана параметрически, т.е. в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in [t_1; t_2],$$

то интеграл имеет вид

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Для построения кривой, заданной параметрически, можно либо попытаться исключить переменную t из системы уравнений, либо строить кривую по точкам с помощью таблицы вида

t	t_1	t_2	...
x	x_1	x_2	...
y	y_1	y_2	...

Эта таблица аналогична таблицам, по которым Вы строите графики функций $y = f(x)$, но сверху у нее приписана строка, соответствующая переменной t. Вы берете значения $t_1, t_2, \ldots$ этой переменной, находите точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$, которые и наносите на график.

Пример 6. Найти длину дуги $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}, \quad x \in [-a; a]$.

Решение. $y' = a \operatorname{sh}\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$. Тогда

$$l = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}dx = \int\limits_{-a}^{a} \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = 2a \operatorname{sh} 1.$$

Пример 7. Найти длину четверти окружности радиуса a.

Решение. Четверть окружности, лежащая в первой координатной четверти ($x \geq 0, y \geq 0$), имеет параметрическое задание

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0; \pi/2].$$

Поскольку $x' = -a\sin t, \quad y' = a\cos t$, то

$$l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = a\int\limits_0^{\pi/2} dt = at|_0^{\pi/2} = \frac{a\pi}{2};$$

что согласуется с известной Вам формулой $L = 2\pi a$ длины всей окружности.

Пример 8. Найти длину дуги кривой $r = a(1 - \cos\varphi)$, $(a > 0)$.

Решение. При $\varphi = 0$ имеем $r = 0$. Далее при увеличении угла φ до значения π происходит увеличение радиуса r до значения $2a$. Затем при изменении угла φ до значения 2π радиус снова уменьшается до нуля. Таким образом, кривая имеет вид, изображенный на рис. 8.

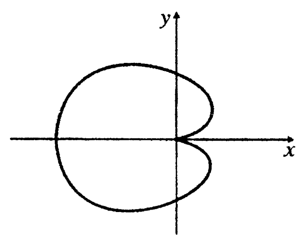

Рис. 8

Чтобы найти ее длину, надо рассмотреть диапазон изменения угла φ от 0 до 2π. Поскольку кривая симметрична относительно оси Ox, то можно взять $\varphi \in [0;\pi]$, а интеграл удвоить. Тогда

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

6. Задачи из физики (задание 9)

Рассматриваемые в задании 9 задачи решаются с помощью определенного интеграла.

Пример 9. Определить силу P давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием $a = 8$ м и высотой $H = 6$ м.

Решение. Из физики известно, что сила давления воды на площадку ΔS, находящуюся на глубине h, определяется по формуле $\Delta P = \rho g h \Delta S$, где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g \approx 10$ м/сек^2 — ускорение свободного падения. Тогда давление на бесконечно малую часть шлюза dS, которая имеет ширину a, бесконечно малую высоту dh и расположена на глубине h, будет равно

$$dP = \rho\, g\, h\; dS = \rho\, g\, a\, h\, dh.$$

Пусть $P(h)$ — сила давления воды на часть шлюза от глубины 0 до глубины h. Тогда $P(0) = 0$, $P(H) = P$ (искомая сила) и с учетом свойств определенного интеграла можно записать

$$P = P(H) - P(0) = P(h)|_0^H = \int_0^H dP = \int_0^H \rho\, g\, a\, h\, dh = \frac{1}{2}\rho g a h^2\Big|_0^H =$$

$$= \frac{1}{2}\rho g a H^2 = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 10\cdot 8\cdot 6^2\,\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{м}{c^2}\cdot м^3 = 1.44\cdot 10^6 н.$$

7. Вычисление несобственных интегралов (задание 10)

Несобственные интегралы бывают двух родов — 1-го и 2-го. Рассмотрим сначала интегралы 1-го рода — с бесконечным пределом (бесконечными пределами) интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном интервале $[a,+\infty)$. Тогда интеграл $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ имеет смысл при $\forall b > a$. Если существует конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ по бесконечному интервалу $[a,+\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае несобственный интеграл называют сходящимся, а если предел не существует, то — расходящимся. Итак,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Аналогичным образом определим

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если в несобственном интеграле оба предела интегрирования бесконечны, то его разбивают на два интеграла, каждый из которых исследуется отдельно: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$, где c — любое конечное число. Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то расходится и интеграл слева.

Пример 10. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8}$.

Решение. Поскольку в этом примере оба предела бесконечны, разбиваем интеграл на два и вычисляем каждый из них согласно определению:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-4x+8} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x-2)^2+4} +$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x-2)^2+4} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}\frac{a-2}{2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-2}{2} - \operatorname{arctg}(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \left(-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим теперь несобственные интегралы 2-го рода — от разрывных функций.

Пусть $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$, в окрестности точки b неограничена (например, имеет разрыв 2-го рода) и интегрируема на $[a,b-\varepsilon]$ при $\forall\varepsilon > 0$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ в обычном смысле не существует. В этом случае несобственным интегралом (2-го рода) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называют предел

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

если он существует. Обозначают его $\int\limits_a^b f(x)dx$ и говорят, что интеграл сходится. Если же предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится или не существует.

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если функция разрывна при $x = a$, то аналогично полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0+0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx,$$

а если при $x = c$, $a < c < b$, то исходный интеграл разбивают на два несобственных интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

каждый из которых исследуют согласно сказанному выше. В этом случае интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, если сходится каждый из интегралов $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$, и расходится, если расходится хотя бы один из них.

Пример 11. Вычислить $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 2$, которая лежит внутри отрезка $[0;3]$, по которому производится интегрирование. Таким образом, в этой задаче $a = 0$, $b = 3$, $c = 2$. Вычисляем несобственный интеграл согласно определению:

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \lim_{\delta\to0+0}\int\limits_{2+\delta}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\Big|_0^{2-\varepsilon} + \lim_{\delta\to0+0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\Big|_{2+\delta}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2} - \lim_{\delta\to0+0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2} = \frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{4}\right).$$

8. Изображение в плоскости xOy области определения функции двух переменных (задание 11)

Чтобы найти область определения функции (в том числе и функции двух переменных), следует найти области определения всех входящих в нее функций. Например, подкоренное выражение для корня четной степени не должно быть отрицательным, знаменатель дроби — не равен нулю и т.д. Для функций двух переменных таким образом получим систему, состоящую из неравенств типа $\varphi(x,y) \geq 0$ или $\psi(x,y) > 0$ (в том числе, возможно, и двойных неравенств), а также выражений типа $g(x,y) \neq 0$. Указанные неравенства задают некоторые области в плоскости xOy, которые и следует изобразить. При этом если граница области не принадлежит самой области (область задана строгим неравенством), то эта граница изображается пунктиром. Пересечение указанных областей после выбрасывания линий $g(x,y) = 0$ и будет представлять собой искомую область определения.

Пример 12. Найти и изобразить в плоскости xOy область определения функции

$$z = \sqrt{y-x^2} - \ln(x-y+1) + \frac{x}{y}.$$

Решение. Функция z включает в себя следующие функции: квадратный корень, логарифм и дробь.

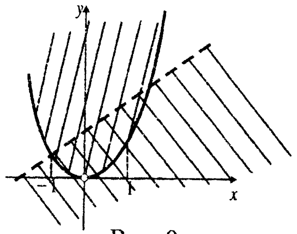

Рис. 9

Поэтому, найдя области определения этих функций, получим следующую систему:

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ x - y + 1 > 0, \\ y \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \geq x^2, \\ y < x + 1, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Изобразив линии $y = x^2$ и $y = x + 1$ (это границы областей), отразив штриховкой сами области, соответствующие записанным неравенствам, и удалив линию $y = 0$ (что скажется лишь в удалении точки $(0; 0)$), получим искомую область определения. На рис. 9 она оказалась клетчатой.

9. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала (задание 12)

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ записывается в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ — частные производные. Поскольку для независимых переменных x и y имеем $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, а при достаточно малых Δx и Δy приращение Δz функции приближенно равно дифференциалу, т.е. $\Delta z \approx dz$, где

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$

то получим выражение

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=x_0, y=y_0} \cdot \Delta y$$

(Здесь дифференциал и частные производные взяты в точке (x_0, y_0)).

Если значения функции $f(x, y)$ и ее частных производных легко вычисляются в точке (x_0, y_0), то с помощью полученного выражения нетрудно

приближенно вычислить и значения функции $f(x, y)$ в точках, достаточно близких к точке $(x_0; y_0)$ (близость точек означает, что если $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то Δx и Δy малы). Это и означает приближенное вычисление значений функции с помощью полного дифференциала. Реально это выглядит следующим образом. Находится точка (x_0, y_0), близкая к точке (x, y), в которой требуется вычислить значение функции, причем эта точка $(x_0; y_0)$ должна быть такой, чтобы в ней легко вычислялась сама функция, а также ее производные. Затем находятся $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. После этого используется записанная формула.

Пример 13. Найти $\sqrt{1.01^2 + 1.99^3}$.

Решение. Здесь $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, а в качестве точки $(x_0; y_0)$ возьмем точку $(1; 2)$. При этом

$$\Delta x = 1.01 - 1 = 0.01, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01,$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{1^2 + 2^3} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}\right|_{(1;2)} = \frac{1}{3};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = \left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}\right|_{(1;2)} = 2.$$

Тогда согласно сказанному выше

$$\sqrt{1.01^2 + 1.99^3} \approx 3 + \frac{1}{3} \cdot 0.01 - 2 \cdot 0.01 \approx 2.983.$$

10. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке (задание 13).

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает поверхность в трехмерном пространстве. Точка $M(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит этой поверхности, если для ее координат выполняется равенство $F(x_0; y_0; z_0) = 0$.

Чтобы найти уравнения касательной плоскости и нормали (перпендикуляра к касательной плоскости) к поверхности в заданной точке M, прежде всего следует найти частные производные функции F в этой точке:

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad B = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad C = \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

(предполагается, что хотя бы одно из чисел A, B и C отлично от 0).

Тогда уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности будут иметь соответственно вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

и

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Пример 14. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x + y^2 + z^2 = 5$ в точке $M(1; 0; -2)$.

Решение. Поскольку $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1;0;-2)} = 1|_{(1;0;-2)} = 1$, $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1;0;-2)} = 2y|_{(1;0;-2)} = 0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1;0;-2)} = 2z|_{(1;0;-2)} = -4$, то уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности будут иметь соответственно вид

$$(x - 1) + 0(y - 0) - 4(z + 2) = 0$$

(т.е. $x - 4z - 9 = 0$) и

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z + 2}{-4}.$$

11. Производная по направлению (задание 14)

Чтобы найти производную функции $u = f(x, y, z)$ по направлению $\vec{l} = (m, n, p)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, следует сначала найти градиент (вектор частных производных) функции u:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Затем необходимо найти единичный вектор $\vec{e}_l$ направления $\vec{l}$:

$$\vec{e}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\right) =$$

$$= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ (и $\vec{e}_l$).

После этого можно вычислить производную функции по заданному направлению. Эта производная равна скалярному произведению градиента, вычисленного в точке M, на единичный вектор заданного направления:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma.$$

Пример 15. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M(-1; 0; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = (-1; 1; -2)$.

Решение. Имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = yz|_M = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = xz|_M = -1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = xy|_M = 0,$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Тогда производная по направлению равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

12. Задачи на градиент (задание 15)

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор $\overrightarrow{\operatorname{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}$, т.е. вектор с координатами $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Поскольку градиент — это вектор, то для выполнения задания 15 необходимо вспомнить некоторые формулы из первого семестра, а именно, формулу для угла между двумя векторами $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y\}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

и формулу для модуля вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

а также учесть, что максимально возможное значение производной по направлению функции z в точке M есть не что иное, как модуль градиента функции в этой точке, т.е. $\left|\overrightarrow{\operatorname{grad}} z\right|_M$.

Пример 16. Найти угол между градиентами функции $z = x^2 y$ в точках $A(1; 1)$ и $B(2; 0)$.

Решение. Градиент функции z равен

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\} = \left\{2xy, x^2\right\}.$$

В точках A и B градиент равен

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} z\Big|_A = \left\{2\cdot 1\cdot 1; 1^2\right\} = \{2; 1\},$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} z\Big|_B = \left\{2\cdot 2\cdot 0; 2^2\right\} = \{0; 4\}.$$

Косинус угла между этими градиентами равен

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + 1\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{0^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Сам же угол

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

13. Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу (задание 16)

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

В задании 16 правая часть этого равенства задана, т.е. известны функции $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y)$. По этим функциям P и Q требуется найти саму функцию z.

Надо сказать, что не для всяких функций P и Q можно найти функцию z. Условием успешного поиска является выполнение тождества $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, которое и необходимо сразу же проверить. Если проверка дала положительный результат, то ищем функцию в виде

$$z = \int P(x, y)\,dx + C_1(y) = \Phi_1(x, y) + C_1(y),$$

где неопределенный интеграл берется по переменной x, а переменная y рассматривается как параметр (поэтому и записано $C_1(y)$, а не просто C_1). Через функцию $\Phi_1(x, y)$ здесь обозначена соответствующая первообразная.

Теперь остается найти функцию $C_1(y)$. Поскольку $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y)$, то взяв производную от записанного выражения для z, получим

$$Q(x, y) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{dC_1(y)}{dy} \Longrightarrow \frac{dC_1(y)}{dy} = Q - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y},$$

причем в правой части последнего равенства после преобразований окажется функция, зависящая лишь от y.

Таким образом, получим, что $C_1(y) = \int\left(Q - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)dy$. Подставив эту функцию в записанное выше выражение для z, получим ответ (вычисляя функцию $C_1(y)$ интегрированием, не забудьте добавить константу C!).

Заметим, что аналогично можно найти z из другого равенства:

$$z = \int Q(x, y)\,dy + C_2(x) = \Phi_2(x, y) + C_2(x).$$

Тогда

$$P(x, y) = \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{dC_2(x)}{dx} \Longrightarrow \frac{dC_2(x)}{dx} = P - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \Longrightarrow$$

$$C_2(x) = \int\left(P - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)dx$$

и опять остается лишь записать ответ.

Пример 17. Найти функцию $z(x, y)$ по ее полному дифференциалу

$$\left(y^2 - 1\right)dx + (2xy + 3y)\,dy.$$

Решение. В данной задаче $P(x, y) = y^2 - 1, Q(x, y) = 2xy + 3y$. Прежде всего проверим выполнение тождества $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, то тождество выполняется.

Теперь согласно вышеизложенному будем искать функцию z :

$$z = \int P(x, y)dx + C_1(y) = \int\left(y^2 - 1\right)dx + C_1(y) =$$

$$= xy^2 - x + C_1(y).$$

Таким образом, здесь $\Phi_1(x, y) = xy^2 - x$. Для определения функции $C_1(y)$ запишем соотношение

$$\frac{dC_1(y)}{dy} = Q - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 2xy + 3y - 2xy = 3y.$$

Тогда $C_1(y) = \int 3y dy = \frac{3}{2}y^2 + C$.

Окончательно получим $z(x, y) = xy^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + C$. Для проверки следует убедиться, что $\frac{\partial z}{\partial x} = P$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$.

14. Экстремумы функции двух переменных (задание 17)

Как и для функции одной переменной, экстремумы функции двух переменных могут достигаться лишь в критических точках. Критическими называются точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют. Таким образом, первым шагом при нахождении экстремумов функции $z = f(x, y)$ является поиск критических точек, для чего нужно решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 & \text{или не существует} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & \text{или не существует} \end{cases}.$$

После того как критические точки найдены, необходимо проверить, являются ли они точками экстремума или нет. Для этого для каждой критической точки M_0 необходимо вычислить частные производные второго порядка и найти определитель

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right|_{M_0}.$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} < 0$, то точка M_0 — точка максимума;

2) если $\Delta > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} > 0$, то точка M_0 — точка минимума;

3) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума; 4) если $\Delta = 0$, то ничего сказать нельзя (экстремум может быть, а может и не быть) и требуются дополнительные исследования.

Пример 18. Найти экстремумы функции

$$z = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2} - x - y + 14.$$

Решение. Найдем частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + y - 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Для поиска критических точек решаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ее решением являются точки $(0; 1)$ и $(1; 0)$. В точке $(1; 0)$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, поэтому $(1; 0)$ — точка минимума.

В точке $(0; 1)$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$, поэтому точка $(0; 1)$ не является точкой экстремума.

15. Текстовые задачи на условный экстремум (задание 18)

Эти задачи очень различны по формулировкам. Методика же их решения в общем одинакова: следует выяснить, что в задаче максимизируется (минимизируется), что является ограничением, а что является искомыми параметрами; записать выражение оптимизируемой величины через искомые параметры и уравнение с ними же, являющееся ограничением; и, наконец, решить задачу на условный экстремум.

Чтобы найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что x и y связаны уравнением $g(x, y) = 0$, т.е. найти условный экстремум, составляется вспомогательная функция

$$u(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Здесь переменными являются x, y и новая переменная λ, называемая множителем Лагранжа. Далее ищется безусловный экстремум функции u по трем переменным x, y и λ, для чего решается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \equiv g(x, y) = 0.$$

Из этой системы находятся координаты экстремальной точки (x, y) (следует все же проверить, что найденная точка является экстремальной).

Пример 19. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его полная поверхность равна S.

Решение. В этой задаче максимизируется объем V, ограничением является условие $S_{\text{полн}} = S$, в качестве параметров конуса возьмем его высоту h и радиус R основания. Тогда можно записать выражение оптимизируемой величины V через параметры R и h: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ и уравнение с ними же, являющееся ограничением:

$$\pi R\sqrt{R^2+h^2} + \pi R^2 - S = 0$$

$\left(\text{т.к. } S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi R\sqrt{R^2+h^2} + \pi R^2\right)$.

Получилась задача на условный экстремум. Чтобы ее решить, составим вспомогательную функцию

$$u(R,h,\lambda) = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \lambda\left(\pi R\sqrt{R^2+h^2} + \pi R^2 - S\right)$$

и приравняем нулю ее частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial h} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 + \lambda\pi R \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial R} = \dfrac{2}{3}\pi R h + \lambda\left(\pi\sqrt{R^2+h^2} + \dfrac{\pi R^2}{\sqrt{R^2+h^2}} + 2\pi R\right) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = \pi R\sqrt{R^2+h^2} + \pi R^2 - S = 0. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения λ и подставив это выражение во второе уравнение, после преобразований получим, что $h^2 = 8R^2$. После этого, используя третье уравнение, нетрудно получить, что оптимальные размеры конуса $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}$, $h = \sqrt{\frac{2s}{\pi}}$. То, что это именно оптимальные значения, следует из смысла задачи.

16. Расстановка пределов интегрирования в повторных интегралах (задание 19)

Пусть область интегрирования D имеет вид, изображенный на рис. 10, причем проекция множества D на ось Ox представляет собой отрезок $[a,b]$, а на ось Oy — соответственно $[c,d]$. Сверху область D ограничена кривой $y = \varphi_2(x)$ (дугой $A_1B_2A_2$), а снизу — кривой $\varphi_1(x)$ (дугой $A_1B_1A_2$).

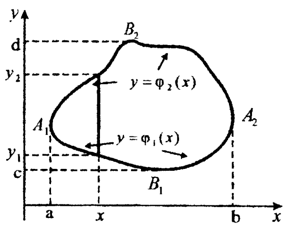

Рис. 10

В этих условиях исходный двойной интеграл $J = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ будет равен следующему повторному интегралу:

$$J = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

(Заметим, что к такому же повторному интегралу сводится двойной интеграл по области D, имеющей вид, подобный изображенному на рис. 11.)

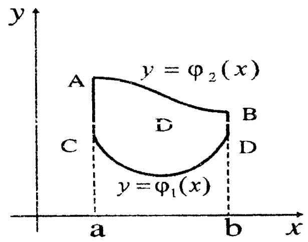

Рис. 11

В записанном повторном интеграле сначала функция $f(x,y)$ интегрируется по переменной y (при этом x считается параметром), а затем полученный результат интегрируется по переменной x. Внешний интеграл (по x) берется по проекции области D на ось Ox, а пределы внутреннего интеграла можно интерпретировать следующим образом. Зафиксируем некоторое значение $x \in [a,b]$ и посмотрим, в каких пределах y_1 и y_2 может изменяться переменная y для точек $(x,y) \in D$ при фиксированном x. Из рис. 10 видно, что этими пределами и являются $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, которые и проставлены в качестве пределов интегрирования внутреннего интеграла.

Двойной интеграл по области D, изображенной на рис. 10, можно свести к повторному интегралу с другим порядком интегрирования, если считать, что область D ограничена справа кривой $x = \psi_2(y)$ (дугой $B_1A_2B_2$), а слева — кривой $x = \psi_1(y)$ (дугой $B_1A_1B_2$). Тогда исходный двойной интеграл будет равен следующему повторному интегралу:

$$J = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

К такому же повторному интегралу сводится двойной интеграл по области D, имеющей вид, подобный изображенному на рис. 12.

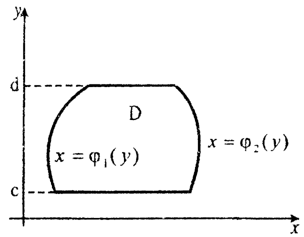

Рис. 12

Заметим еще, что если, например, дуга $A_1B_2A_2$ (см. рис. 10) не имеет единого выражения $y = \varphi_2(x)$ (часть ее описывается одним уравнением, а другая часть — другим), то для записи повторного интеграла следует разбить область D на две области, для каждой записать свой повторный интеграл, а затем эти интегралы просуммировать.

Пример 20. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ изобразить область D, ограниченную линиями $y = x^2$ и $y = 4$, расставить пределы интегрирования в различных порядках.

Решение. Область D изображена на рис. 13.

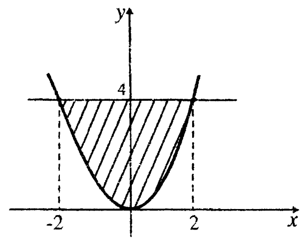

Рис. 13

Поскольку проекция области D на ось Ox представляет собой отрезок $[-2;2]$, а ее нижней и верхней границами являются соответственно функции $y = \varphi_1(x) = x^2$ и $y = \varphi_2(x) = 4$, то один из повторных интегралов имеет вид

$$J = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy.$$

Чтобы записать повторный интеграл с другим порядком интегрирования, необходимо получить уравнения линий, ограничивающих область D слева и справа, причем эти уравнения должны иметь вид $x = \psi_1(y)$,

$x = \psi_2(y)$, т.е. x должен быть выражен через y. Слева и справа область ограничивают две ветви кривой $y = x^2$. Выражая x через y, получим уравнения $x = -\sqrt{y}$ для левой ветви и $x = \sqrt{y}$ для правой. Учитывая, что проекция области D на ось Oy есть отрезок $[0;4]$, запишем повторный интеграл в виде

$$J = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

17. Вычисление с помощью двойного интеграла объема тела, площади фигуры, моментов инерции и нахождение координат центра тяжести (задания 20-22)

Все эти задачи представляют собой различные приложения двойного интеграла. Для их решения необходимо записать двойной интеграл, определив область интегрирования и подынтегральную функцию, а затем согласно п.16 свести его к повторному интегралу и вычислить.

Для вычисления объема тела необходимо найти проекцию тела на одну из координатных плоскостей (на какую именно — решается с учетом простоты дальнейших вычислений). Пусть этой плоскостью является xOy (ее уравнение $z = 0$), а проекцией тела на эту плоскость является область D. Пусть тело ограничено поверхностью $z = f_1(x,y)$ снизу и поверхностью $z = f_2(x,y)$ сверху (см. рис. 14).

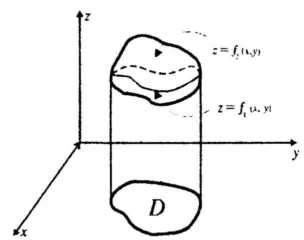

Рис. 14

Тогда выражение для объема имеет вид:

$$V = \iint\limits_D (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy.$$

Масса плоской пластинки D, ограниченой линией L и имеющей поверхностную плотность $\rho(x,y)$, вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy,$$

ее (пластинки) статические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy — по формулам

$$M_x = \iint\limits_D \rho(x,y)y\,dxdy,$$
$$M_y = \iint\limits_D \rho(x,y)x\,dxdy,$$

координаты x_c и y_c центра тяжести — по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m},$$

а моменты J_x, J_y и J_0 инерции относительно осей Ox, Oy и точки O — по формулам

$$J_x = \iint\limits_D \rho(x,y)y^2dxdy,$$
$$J_y = \iint\limits_D \rho(x,y)x^2dxdy,$$
$$J_0 = J_x + J_y = \iint\limits_D \rho(x,y)(x^2+y^2)dxdy.$$

С вычислением площадей дело обстоит еще проще: двойной интеграл $S = \iint\limits_D dxdy$ (т.е. $f(x,y) \equiv 1$) как раз и представляет собой площадь области D. Однако в ряде задач целесообразно вычислять площадь с помощью двойного интеграла в полярных координатах. В этом случае площадь имеет выражение

$$S = \iint\limits_D r\,dr\,d\varphi,$$

а сведение двойного интеграла к повторному аналогично заданию 19. Действительно, пусть область имеет вид, изображенный на рис. 15: область D умещается в растворе угла φ от α до β, дуги $A_1B_1A_2$ и $A_1B_2A_2$ заданы соответственно уравнениями $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$.

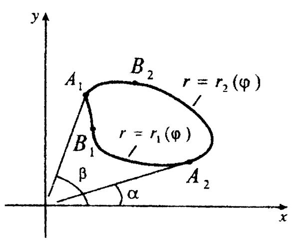

Рис. 15

Заметим, что дуга $A_1B_1A_2$ в некоторых задачах может "стянуться" в точку (если область D представляет собой криволинейный сектор). В этом случае $r_1(\varphi) = 0$.

Для области D на рис. 15 повторный интеграл будет таким:

$$J = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr.$$

Пример 21. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

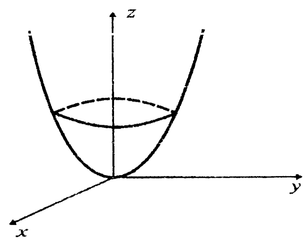

Рис. 16

Решение. Поверхность $z = x^2 + y^2$ представляет собой параболоид, изображенный на рис. 16. Остальные поверхности ограничивают бесконечно вытянутую в положительном направлении оси Oz призму с основанием, изображенным на рис. 17.

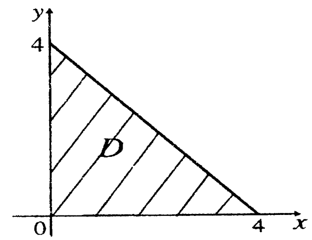

Рис. 17

Поскольку поверхность $z = x^2 + y^2$ целиком располагается в области $z \geq 0$ и имеет в качестве проекции на плоскость xOy саму эту плоскость, то проекцией интересующей нас фигуры на плоскость xOy является весь треугольник D, изображенный на рис. 17. При этом $z = f_2(x,y) = x^2 + y^2$

является уравнением верхней границы, а $z = f_1(x, y) = 0$ — нижней. Таким образом можно записать выражение для искомого объема:

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Теперь остается лишь вычислить двойной интеграл, используя рис. 17:

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^4 dx\left(x^2y + y^3/3\right)\Big|_0^{4-x} = \int\limits_0^4 (x^2(4-x) + \frac{(4-x)^3}{3})dx =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(4-x)^4}{3\cdot 4}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{4\cdot 4^3}{3} - \frac{4^4}{4} + \frac{4^4}{3\cdot 4} - \frac{128}{3}.$$

(Выражение $4 - x$ получено из равенства $x + y = 4$, т.е. $y = 4 - x$).

Пример 22. Найти координаты центра тяжести и моменты инерции тонкой пластинки, представляющей собой равносторонний треугольник со стороной a (см. рис. 18), считая, что $\rho \equiv 1$.

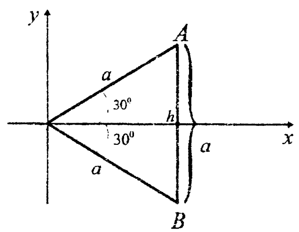

Рис. 18

Решение. Прежде всего запишем уравнения сторон: $y = x/\sqrt{3}$ — сторона OA; $y = -x/\sqrt{3}$ — сторона OB; $x = h = a\sqrt{3}/2$ — сторона AB.

Тогда

$$M_y = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^h dx \int\limits_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} xdy = \int\limits_0^h x\frac{2x}{\sqrt{3}}dx = \frac{a^3}{4},$$

$$M_x = \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^h dx \int\limits_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} ydy = \int\limits_0^h dx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} = 0,$$

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^h dx \int\limits_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}} dy = 2\int\limits_0^h \frac{x}{\sqrt{3}}dx = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4},$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{a^3\cdot 4}{4\cdot\sqrt{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = 0.$$

$$J_x = \iint_D y^2dxdy = \int_0^h dx\int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} y^2dy = \int_0^h dx\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \int_0^h \frac{2x^3}{9\sqrt{3}}dx = \frac{x^4}{18\sqrt{3}}\Bigg|_0^h = \frac{h^4}{18\sqrt{3}} = \frac{a^4\cdot 9}{16\cdot 18\sqrt{3}} = \frac{a^4}{32\sqrt{3}};$$

$$J_y = \iint_D x^2dxdy = \int_0^h dx\int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} x^2dy = \int_0^h x^2\frac{2x}{\sqrt{3}}dx =$$

$$= \frac{x^4}{2\sqrt{3}}\Bigg|_0^h = \frac{9a^4}{32\sqrt{3}};$$

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{10a^4}{32\sqrt{3}} = \frac{5a^4}{16\sqrt{3}}.$$

Пример 23. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$.

Решение. Выделяя полные квадраты, уравнения $x^2+y^2 = 4x$ и $x^2+y^2 = 8x$ нетрудно привести соответственно к виду

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \text{ и } (x-4)^2 + y^2 = 16.$$

Это уравнения окружностей с центрами $(2;0)$ и $(4;0)$ и радиусами соответственно 2 и 4. Уравнения $y = x$ и $y = \sqrt{3}x$ — это уравнения прямых, проходящих через начало координат и наклоненных под углами $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ (т.к. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$).

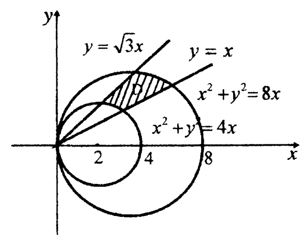

Рис. 19

Все указанные линии изображены на рис. 19, а область D, площадь которой требуется найти, заштрихована. Интегрирование по области D, записанной в переменных x и y, затруднительно, поэтому получим уравнения линий в полярных координатах, вспоминая, что $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ и убедившись, что $x^2 + y^2 = r^2$. Подставляя эти соотношения в уравнения, для первой линии получим $r^2 = 4r\cos\varphi$, т.е. $r = 4\cos\varphi$, для второй (аналогично) $r = 8\cos\varphi$. Легко проверить, что уравнением третьей линии будет $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, а четвертой — $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Тогда площадь фигуры вычислится с помощью двойного интеграла в полярных координатах:

$$S = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 24\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 12\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} (\cos 2\varphi + 1) d\varphi = 6(\sin 2\varphi + 2\varphi)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 1 - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{3} - 6 + \pi.$$

18. Вычисление тройных интегралов (задание 23)

Как и двойной интеграл, тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz$ также вычисляется сведением к повторному, причем это сведение аналогично записанному для двойного интеграла.

Пусть область интегрирования V имеет вид, изображенный на рис. 20, причем проекцией области V на плоскость xOy является множество D, а на ось Ox — отрезок $[a, b]$. Сверху область V ограничена поверхностью $z = \psi_2(x, y)$, а снизу — поверхностью $z = \psi_1(x, y)$ (ψ_1 и ψ_2 — непрерывные функции).

В этих условиях тройной интеграл по области V сводится сначала к двойному по области D и "ординарному" (т.е. обычному), а затем двойной интеграл сводится к повторному (см. раздел 16):

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

где $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — линии, ограничивающие множество D на плоскости xOy "снизу" и "сверху" (см. рис. 10).

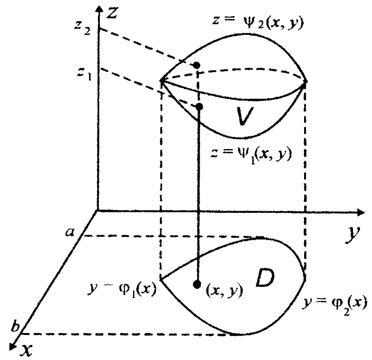

Рис. 20

В записанном повторном интеграле сначала функция $f(x, y, z)$ интегрируется по переменной z (при этом x и y считаются параметрами), затем полученный результат интегрируется по переменной y (при этом x считается параметром) и, наконец, то, что получилось, интегрируется по переменной x. Пределы интегралов по x и по y прокомментированы в разделе 16, касающемся двойных интегралов, а пределы интеграла по z интерпретируем следующим образом. Зафиксируем некоторую точку $(x, y) \in D$ и посмотрим, в каких пределах z_1 и z_2 может изменяться переменная z для точек $(x, y, z) \in V$ при этих фиксированных x и y. Из рисунка 20 видно, что этими пределами и являются $z_1 = \psi_1(x, y), z_2 = \psi_2(x, y)$, которые и проставлены в качестве пределов интегрирования в интеграле по z.

Заметим, что тройной интеграл можно свести к повторному не только в записанном порядке интегрирования, но и в других порядках (желательно выбрать наиболее удобный из них). Также заметим, что для правильного и более легкого сведения тройного интеграла к повторному следует нарисовать два рисунка: один — область V в пространстве (типа рис. 20), другой — множество D на плоскости xOy (типа рис. 10).

Как и двойной интеграл, тройной также нередко вычисляется легче с помощью замены переменных. Если для двойного интеграла наиболее часто используется переход к полярным координатам, то для тройного — к цилиндрическим или сферическим.

Рассмотрим сначала общую формулу замены переменных в тройном интеграле.

Пусть функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрерывны вместе с частными производными. Запишем якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Тогда формула замены переменных в тройном интеграле будет иметь вид:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |J|\, dudvdw,$$

где V' — область V, записанная в координатах u, v, w.

Цилиндрическая система координат включает в себя полярные координаты r и φ вместо координат x и y, а координату z — без изменений. (см. рис. 21). При этом уравнения перехода от одной системы координат к другой имеют вид $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$, а якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

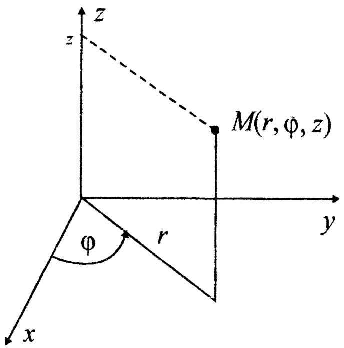

Рис. 21

Заметим, что уравнение $r = a$ задает цилиндрическую поверхность, $\varphi = b$ — вертикальную полуплоскость (прямая Oz — ее граница), а $z = c$ — горизонтальную проскость ($a \neq 0$, b и c — константы).

Согласно сказанному, замена переменных в тройном интеграле при переходе от декартовой системы координат к цилиндрической осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\, drd\varphi dz.$$

Сферические координаты ρ, φ, θ ($\rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$) задают положение точки M в пространстве согласно рис. 22 (фактически координаты z и r из цилиндрической системы координат заменяются на полярные координаты ρ и θ в вертикальной проскости, проходящей через ось Oz и точку M, а координата φ остается без изменений). При этом сферические координаты связаны с декартовыми соотношениями $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, а якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta \leq 0.$$

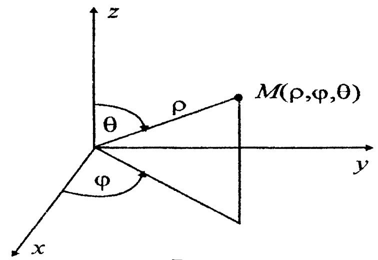

Рис. 22

Заметим, что уравнение $\rho = a$ задает сферу, $\varphi = b$ — полуплоскость, а $\theta = c$ — полуконус ($a \neq 0, b$ и $c \notin \{0; \pi/2; \pi\}$ — константы).

Согласно сказанному, с учетом того, что $|J| = \rho^2\sin\theta$, получаем следующую формулу замены переменных в тройном интеграле при переходе от декартовой системы координат к сферической:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Кстати, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Пример 24. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x + y)\, dxdydz$ по области V, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + \dfrac{z}{2} = 1$.

Решение. Изобразим область V и ее проекцию D на плоскость xOy (см. рис. 23). Из рисунков и уравнения плоскости $x + y + \frac{z}{2} = 1$ видно, что область V ограничена сверху поверхностью $z = \psi_2(x, y) = 2(1 - x - y)$, снизу — поверхностью $z = \psi_1(x, y) = 0$, а ее проекция D ограничена сверху линией $y = \varphi_2(x) = 1 - x$ (следует из уже упомянутого уравнения плоскости при $z = 0$), а снизу — линией $y = \varphi_1(x) = 0$. Тогда согласно общей формуле сведения тройного интеграла к повторному, получим

$$\iiint\limits_V (x+y)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{2(1-x-y)} (x+y)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left((x+y)z\Big|_0^{2(1-x-y)} \right) dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)2(1-x-y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(2(x+y) - 2(x+y)^2\right) dy = \int\limits_0^1 \left((x+y)^2 - \frac{2}{3}(x+y)^3\Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3} - x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{6}.$$

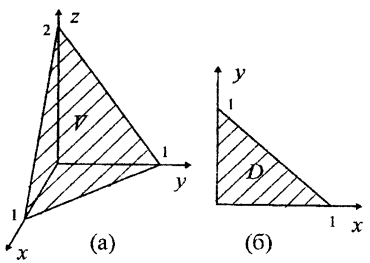

Рис. 23

Пример 25. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2)z\,dxdydz$ по области V, заданной соотношениями $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \ge 1$, $z \ge 0$.

Решение. Область V имеет вид, изображенный на рис. 24. Учитывая соотношения, задающие область V, а также вид подынтегральной функции, целесообразно перейти к цилиндрическим координатам.

Поскольку $x^2 + y^2 = r^2$, то соотношения, задающие область V' (область V в новых координатах), будут иметь вид $1 \le r \le 2$, $0 \le z \le \sqrt{4 - r^2}$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

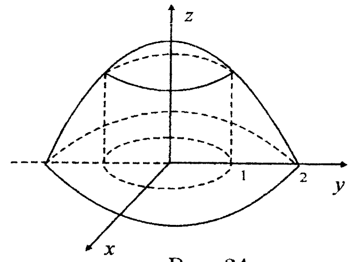

Рис. 24

Тройной интеграл, который примет вид

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) z\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 dr \int\limits_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 z\, r dz,$$

предлагаем вычислить самостоятельно.

Пример 26. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (1 + x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$, где область V расположена в первом октанте и ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0.$$

Решение. Прежде всего изобразим область V (см. рис. 25).

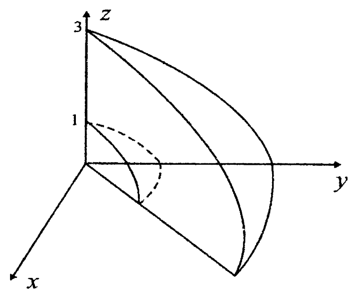

Рис. 25

В данном примере целесообразно перейти к сферическим координатам. Поскольку $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, то область V' будет задаваться соотношениями $1 \le \rho \le 3$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $\pi/3 \le \varphi \le \pi/2$ (т.к. в первой четверти плоскости xOy прямая $x = 0$ имеет уравнение $\varphi = \pi/2$ в полярных координатах, а прямая $y = \sqrt{3}x$ – соответственно, $\varphi = \pi/3$). Тогда тройной интеграл примет вид

$$\iiint\limits_V (1 + x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_1^3 (1 + \rho^2)\rho^2 \sin\theta d\rho.$$

Этот интеграл также предлагаем вычислить самостоятельно.

19. Вычисление криволинейных интегралов (задание 24)

Криволинейный интеграл (второго рода) вдоль линии L имеет вид

$$J = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Если линия L задана в виде $y = f(x)$, а $x \in [a,b]$, то, просто подставляя вместо y его выражение $y = f(x)$, получим

$$J = \int_a^b P(x, f(x))dx + Q(x, f(x))df(x) =$$

$$= \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx,$$

т.е. обычный определенный интеграл.

Если же кривая L задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$, то аналогично, просто подставляя вместо x и y их выражения через t, получим

$$J = \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t))dx(t) + Q(x(t), y(t))dy(t) =$$

$$= \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

Если кривая L состоит из нескольких частей, описываемых разными уравнениями, то необходимо записать свой интеграл по каждому куску, а затем интегралы просуммировать. В частности, интеграл по замкнутому контуру, изображенному на рис. 26, будет равен

$$J = \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)) + Q(x, \varphi_1(x))\varphi_1'(x))dx +$$

$$+ \int_b^a (P(x, \varphi_2(x)) + Q(x, \varphi_2(x))\varphi_2'(x))dx.$$

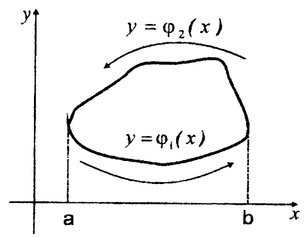

Рис. 26

Пример 27. Найти $J = \int_L ydx - xdy$, где L — эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, который обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Решение. Поскольку при полном обходе эллипса t меняется от 0 до 2π (если начинать из самой правой точки), то интеграл будет равен

$$J = \int_0^{2\pi} (yx' - xy')dt = \int_0^{2\pi} (b\sin t \cdot (-a\sin t) - a\cos t \cdot b\cos t)dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -abt|_0^{2\pi} = -2\pi ab.$$

20. Вычисление поверхностных интегралов (задание 25)

Поверхностные интегралы бывают 1-го и 2-го рода. Первые из них в настоящей РГР не рассматриваются, поэтому перейдем сразу к поверхностным интегралам 2-го рода.

Пусть S гладкая ориентированная поверхность, в каждой точке $M(x,y,z)$ которой определено положительное направление нормали $\vec{n}(M)$ — непрерывной вектор-функции. Пусть в точках $M(x,y,z) \in S$ заданы непрерывные функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.

Если для одной из сторон поверхности S угол между нормалью $\vec{n}(M)$ и осью Oz острый для $\forall M \in S$, то обозначим эту сторону S^+, а противоположную — S^-.

Разобьем поверхность S на части $S_1, ..., S_n$ с диаметрами $d_1, ..., d_n$ и обозначим через ΔP_i, $i = 1, ..., n$, площадь проекции части S_i на плоскость xOy. Выберем на каждой части S_i произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Тогда предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta P_i$ при $d \to 0$ ($d = \max\limits_i d_i$), не зависящий от способа разбиения поверхности S на части и выбора точек M_i (предел существует в силу непрерывности функции R), называется поверхностным интегралом 2-го рода от функции $R(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)\,dxdy$.

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода $\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)\,dydz$ и $\iint\limits_{S^+} Q(x,y,z)\,dxdz$. Сумма всех этих интегралов называется общим поверхностным интегралом и обозначается

$$\iint\limits_{S^+} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy.$$

Если поверхность S задана в виде $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D \subset xOy$, то поверхностный интеграл 2-го рода сводится к двойному интегралу:

$$\iint\limits_{S^+} R(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi(x, y))\, dxdy.$$

Соответственно

$$\iint\limits_{S^-} R(x, y, z)\, dxdy = -\iint\limits_{D} R(x, y, \varphi(x, y))\, dxdy.$$

Аналогично вычисляются $\iint\limits_{S^+} P\, dydz$ и $\iint\limits_{S^+} Q\, dxdz$.

Пример 28. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint\limits_{S} 2xz\, dxdy - y\, dxdz + 3z\, dydz,$$

где S — верхняя сторона плоскости $3x + y - 2z = 6$, ограниченная координатными плоскостями.

Решение. Изобразим указанную поверхность (см. рис. 27) и рассмотрим сначала интеграл $\iint\limits_{S} 2xz\, dxdy$. Поскольку уравнение поверхности S можно переписать в виде $z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(3x + y - 6)$ (следует из уравнения $3x + y - 2z = 6$), причем $(x, y) \in D$, где D — это ΔOAB (проекция поверхности S на плоскость xOy), то поверхностный интеграл сводится к двойному:

$$\iint\limits_{S^+} 2xz\, dxdy = \iint\limits_{\Delta OAB} 2x \cdot \frac{1}{2}(3x + y - 6)\, dxdy.$$

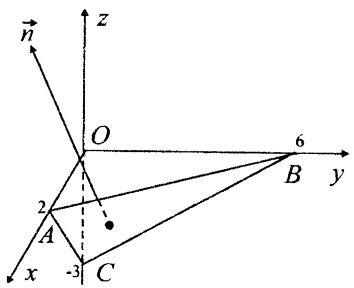

Рис. 27

Здесь S заменено на S^+, так как для верхней стороны плоскости угол между $\vec{n}$ и Oz — острый.

Учитывая, что для ΔOAB $x \in [0; 2]$, а $y \in [0; 6 - 3x]$ (так как прямая AB на плоскости xOy описывается уравнением $3x + y = 6$, то есть $y = 6 - 3x$), сводим двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_{\Delta OAB} x(3x + y - 6)\, dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{6-3x} \left(3x^2 + xy - 6x\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \left(3x^2 y + \frac{xy^2}{2} - 6xy\right)\Bigg|_0^{6-3x}.$$

Закончите вычисления самостоятельно.

Аналогично вычисляются интегралы $-\iint\limits_{S} y\, dxdz$ и $3\iint\limits_{S} z\, dydz$. Например, для первого из них S заменится на S^- (так как угол между $\vec{n}$ и Oy — тупой), уравнение поверхности S перепишется в виде $y = 6 - 3x + 2z$, а в качестве проекции S на плоскость xOz выступит ΔOAC. Тогда

$$-\iint\limits_{S^-} y\, dxdz = \iint\limits_{\Delta OAC} (6 - 3x + 2z)\, dxdz.$$

Сведение двойного интеграла к повторному и его вычисление проведите самостоятельно.

21. Дивергенция и ротор векторного поля (задания 26 и 27)

Векторным полем в области G называется вектор-функция

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

заданная в точках $M(x, y, z) \in G \subset \mathbf{R}^3$.

Векторное поле может быть также задано на плоской области $G \subset \mathbf{R}^2$. В этом случае $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$.

Таким образом, векторное поле

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

задает вектор для любой точки M области G. В частности, градиент

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

функции $f(x, y, z)$ трех переменных представляет собой векторное поле, так как каждой точке (x, y, z) области ставит в соответствие вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Как для скалярного поля существует понятие градиента, так для векторного поля существуют понятия дивергенции и ротора.

Дивергенция (расходимость) векторного поля

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

представляет собой скалярное поле

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

а ротор (вихрь) - векторное поле

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

или в символическом виде

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

где определитель раскрывается обычным образом (например, разложением по первой строке), а под произведением, например, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и P понимается частная производная $\dfrac{\partial P}{\partial x}$. С подобным символизмом мы уже сталкивались, когда дифференциалы высших порядков от функции f двух переменных символически записывали в виде $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n f$.

Пример 29. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля

$$\vec{F} = (x^2y + y^2z)\vec{i} - xyz\vec{j} + (x + y)z\vec{k}.$$

Решение. В данном случае $P(x, y, z) = x^2y + y^2z$, $Q(x, y, z) = -xyz$, $R(x, y, z) = (x + y)z$. Поэтому $\mathrm{div}\vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 2xy - xz + x + y$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k} =$$

$$= (z + xy)\vec{i} + (y^2 - z)\vec{j} + (-yz - x^2 - 2yz)\vec{k} = (z + xy, y^2 - z, -3yz - x^2).$$

Литература

по РГР 2.2, которую можно приобрести на кафедре высшей математики.

1.Зленко А.А. Криволинейные интегралы.

2.Чернов Д.Э. Двойной интеграл? Нет проблем! В помощь студенту.

3.Мышкис П.А. Нестандартные задачи по курсу высшей математики.

4.Студентам для подготовки к аттестации по курсу высшей математики. 2-й семестр. С использованием опыта тестирования зарубежных и отечественных вузов.

Расчетно-графическая работа 2.2.
Определенные интегралы и функции многих переменных

1. Найти среднее значение функции в указанном промежутке.

1. $f(x)=\sin^4 x,\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
2. $f(x)=x\sin 2x, x\in[-\pi;0]$.
3. $f(x)=\cos^2 x,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
4. $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in[1;4]$.
5. $f(x)=x^3-x,\ \ x\in[0;1]$.
6. $f(x)=10+2\sin x, x\in[0;2\pi]$.
7. $f(x)=\ln 3x,\ x\in\left[1;\frac{e}{3}\right]$.
8. $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}},\ x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.
9. $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}},\ x\in[0;1]$.
10. $f(x)=x\sqrt{1+x^2},\ x\in[0;1]$.
11. $f(x)=x^3e^{-x^4/4}, x\in[0;2]$.
12. $f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^5}, x\in[2;3]$.
13. $f(x)=\cos^3 x, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
14. $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}},\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
15. $f(x)=xe^{-x^2/2}\ , x\in[2;4]$.
16. $f(x)=\frac{1}{x^2+x}\ , x\in[1;1,5]$.
17. $f(x)=\operatorname{tg}x, x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.
18. $f(x)=\frac{1}{(1+5x)^3}, x\in[-2;-1]$.
19. $f(x)=\operatorname{ctg}x, x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$.
20. $f(x)=x+\sqrt[4]{(x-1)^3}, x\in[1;2]$.
21. $f(x)=\sqrt[3]{x}, x\in[0;1]$.
22. $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in[1;4]$.
23. $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}, x\in\left[e;e^3\right]$.
24. $f(x)=x^3(x+2)^2, x\in[0;1]$.
25. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in[0;1]$.
26. $f(x)=\sin x\cos^2 x,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
27. $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}, x\in\left[\frac{1}{\pi};\frac{2}{\pi}\right]$.
28. $f(x)=\sin 2x\cos 3x, x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
29. $f(x)=\cos^4 x,\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
30. $f(x)=\sin^2 x\cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

2. Найти точки экстремума и точки перегиба функции.

1. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-1)(t+1)^2dt$.
2. $\Phi(x)=\int\limits_{-1}^x t\sqrt{1-t^2}dt$.
3. $\Phi(x)=\int\limits_{-2}^x 2t\left(t^2-3\right)dt$.
4. $\Phi(x)=\int\limits_0^x \left(t^3-3t^2\right)dt$.
5. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2dt$.
6. $\Phi(x)=\int\limits_0^x \frac{1-t^2}{1+t^2}dt$.
7. $\Phi(x)=\int\limits_1^x \left(8t-\frac{1}{t^2}\right)dt$.
8. $\Phi(x)=\int\limits_{e^{-1}}^x \frac{1-\ln t}{t}dt$.

9. $\Phi(x)=\int\limits_0^x te^{-t^2/2}dt$.
10. $\Phi(x)=\int\limits_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$.
11. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-5)(t-4)dt$.
12. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t^3+6t^2+9t)dt$.
13. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t+5)(t-2)^2dt$.
14. $\Phi(x)=\int\limits_{0.5}^x \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt$.
15. $\Phi(x)=\int\limits_1^x \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$.
16. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t+1)(t+4)^2dt$.
17. $\Phi(x)=\int\limits_{-1}^x t^3(t+2)dt$.
18. $\Phi(x)=\int\limits_0^x \left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)dt$.
19. $\Phi(x)=\int\limits_{e^{-1}}^x \frac{e\ln t}{t}dt$.
20. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-2)(t-1)^2dt$.
21. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (4t-t^2)dt$.
22. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t^2-4t-5)dt$.
23. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t^2-2t-3)dt$.
24. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-2)(t-3)^2dt$.
25. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t+1)(t-1)^2dt$.
26. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-2)(t+1)^2dt$.
27. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t+2)(t-1)^2dt$.
28. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-3)(t+2)dt$.
29. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-2)^2(t+3)dt$.
30. $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-4)(t+3)^2dt$.

3. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

1. $y=4-x^2,\ y=\frac{1}{2}x+1$.
2. $y^2=x+2,\ y=x$.
3. $xy=4, y=4, x=2$.
4. $y^2=2x+4, y=x+2$.
5. $y=x^2+1, x+y=3$.
6. $y=x^2, x+y=2$.
7. $y^2=2x+1, x-y=1$.
8. $y=x^2,\ y=2-x^2$.
9. $y=x^2+x-5, y=-2x^2-2x+1$.
10. $y=2x-x^2, x+y=0$.
11. $y=x^2-2x-6, y=-3x^2+2x+2$.
12. $y=x^2+2x, y=x+2$.
13. $y=-x^2+3x+3, y=x$.
14. $y=x^2-2x+3, y=3x-1$.
15. $y=x^2-2x+3, y=6-4x$.
16. $y=x^2-6,\ y=-x^2+5x-6$.
17. $y=x^2+2x+3, y=2x+4$.
18. $y=x^2+8x-12, y=18x-x^2$.
19. $y=x^2-2x-3, y=-x^2-2x+5$.
20. $y=x, y=2-x^2$.
21. $x=-2y^2, x=1-3y^2$.
22. $y=x^2+2x+1, y=4-x$.
23. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6,\ y=\frac{1}{2}x^2-x+1$.
24. $y=3+2x-x^2,\ y=4x$.

25. $y=6+x-3x^2, y=-2x$. 26. $y=15+2x-5x^2, y=-8x$.
27. $y=12+2x-3x^2, y=-7x$. 28. $y=3-x-x^2, y=-3x$.
29. $y=15+2x-3x^2, y=-10x$. 30. $y=-1+x-3x^2, y=5x$.

4. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

1. $r=3+\sin 2\varphi$. 2. $r^2=4\cos 2\varphi$. 3. $r=2(1-\cos\varphi)$.
4. $r=2\sin 3\varphi$. 5. $r=3\cos 2\varphi$. 6. $r=2\sin\varphi$.
7. $r=3\sin 2\varphi$. 8. $r=2-\cos 3\varphi$. 9. $r=\frac{2}{\varphi}$; $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le 2\pi$.
10. $r=3(1+\sin\varphi)$. 11. $r^2=4\sin 2\varphi$. 12. $r=2\sin\varphi-1$.
13. $r^2=4\sin 4\varphi$. 14. $r=2(2+\cos\varphi)$. 15. $r=2-\cos\varphi$; $r=\cos\varphi$.
16. $r=2\sin 5\varphi$. 17. $r=3\cos 3\varphi$. 18. $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.
19. $r=\cos^2\varphi$. 20. $r=2(1-\sin\varphi)$. 21. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.
22. $r=2\cos 5\varphi$. 23. $r=1+2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. 24. $r=\cos\varphi$, $r=2\cos\varphi$.
25. $r=2\sin^2\varphi$. 26. $r=2+\cos 4\varphi$. 27. $r=1+\cos\varphi$.
28. $r=2\cos\varphi$. 29. $r=2(2+\sin\varphi)$. 30. $r=1+2\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями. В задачах 1 – 15 ось вращения Ox, в задачах 16 – 30 ось вращения Oy.

1. $xy=4, x=1, x=4, y=0$. 2. $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{2}; x=\pm 2, y=0$.
3. $y=\cos x, x=0, y=0$. 4. $y=e^{-x}-1$, $y=1$; $x=0$.
5. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}$; $y=0$. 6. $y=x^2-3x, y=2x, y\ge 0$.
7. $y=\frac{x^2}{2}+2x+2; x=0, y=0$. 8. $y=-x^2+2x, y=0$.
9. $y=-2x^2+8x, y=0$. 10. $y=x^2+2x+3$; $y=0$; $-1\le x\le 0$.
11. $y=x^2+4x+5, y=0, -2\le x\le 0$. 12. $y=\sin^2 x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$.
13. $y=x^2-2x+2, y=0, x=0, x=2$. 14. $y=x^2-x, y=0$.
15. $y=(x-1)^2; y=1$. 16. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1, y=\pm 2$.
17. $y^2=(x+4)^3$, $x=0$. 18. $(y-1)^2=x; x=0, y=2$.
19. $y=x^2, 2x+y-3=0, x\ge 0$. 20. $y=x^2, 8x=y^2$.
21 $y=x^2$, $y=4$, $x\ge 0$. 22. $y=2\left(\frac{x}{3}\right)^{2/3}$, $y=0, 0\le x\le 3$.
23. $y=\frac{x}{4-x}; x=2, y=0$. 24. $y^2=4-x, x\ge 0, y\ge 0$.
25. $y=\arcsin x$, $y=0$, $x=1$. 26. $y=2x^2$; $y=2|x|$.
27. $2x=3y-y^2; x=0, y=2x$. 28. $3x=2y-y^2; x=0, y=3x$.
29. $y=\ln(2x+3), y=2\ln x, y=0, x=0$. 30. $y=\ln(x+2)$; $y=2\ln x$, $y=0, x=0$.

6. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1. $y^2=x^3$, $x\le\frac{4}{3}$. 2. $y=x^{3/2}, 0\le x\le 4$.
3. $y=\frac{x^2}{4}-1, y\le 0$. 4. $y=\ln x, 1\le x\le\sqrt{3}$.
5. $y=\ln(2\cos x), 0\le x\le\frac{\pi}{3}$. 6. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}, 1\le x\le 2$.
7. $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$. 8. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$, $0\le x\le 2$.
9. $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}, 0\le x\le 3$. 10. $9y^2=x(x-3)^2$, $x\le 3$.
11. $y=\ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$. 12. $y^2=16x, 0\le x\le 81$.
13. $y^3=x^2, 0\le y\le 4/3$. 14. $y=\frac{x^2-2}{3}, 0\le x\le 2$.
15. $y=4-x^2$, $y\ge 0$. 16. $y=-\ln(\cos x)$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$.
17. $y=\ln(3\sin x)$, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$. 18. $y=\ln(5\cos x)$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.
19. $y=\ln\frac{1}{x}$, $\frac{3}{4}\le x\le\frac{4}{3}$. 20. $y=2-e^x, \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$.
21. $y=4\operatorname{ch}\frac{x}{4}$, $0\le x\le 1$. 22. $y=\ln(2\sin x)$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}$.
23. $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2\pi}{3}$. 24. $y=x^2, 0\le x\le 1$.
25. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x, 0\le x\le 3$. 26. $y=2\ln(4-x^2), y\ge 0$.
27. $y^2=5(x-1)^3, 1\le x\le 2$. 28. $y^2=\frac{5}{2}(x-2)^3, 2\le x\le 4$.
29. $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$, $0\le x\le 1$. 30. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y, 1\le y\le e$.

7. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1. $x=t^2$, $y=t^3+1$, $0\le t\le 1$.
2. $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$.
3. $x=\frac{t^6}{6}, y=2-\frac{t^4}{4}, 0\le x\le 2$.
4. $x=t^3+1, y=t^2-1$, $y\le 0$.
5. $x=\sqrt{3}t^2, y=t-t^3, -1\le t\le 1$.
6. $x=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}\cos 2t, y=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t$, $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{2\pi}{3}$.
7. $x=1-e^t$, $y=1+e^t$, $0\le t\le 1$.
8. $x=\sin^3 t, y=\cos^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.
9. $x=t^6, y=1-t^4$, $0\le t\le 1$.
10. $x=\frac{t^3}{3}, y=1-\frac{t^2}{4}$, $y\ge 0$.
11. $x=\frac{t^2}{2}-1, y=\frac{t^2}{2}, 0\le t\le 1$.
12. $x=t^2, y=t^3-1$, $0\le t\le 1$.

13. $x = t, y = t^2 - 1, -1 \le t \le 1.$
14. $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi.$
15. $x = e^{2t}\cos t, y = e^{2t}\sin t,\ 0 \le t \le 1.$
16. $x = 3\cos t - \cos 3t, y = 3\sin t - \sin 3t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
17. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
18. $y = t^2 + 1,\ x = \frac{t^3}{3} - t,\ 0 \le t \le \sqrt{3}.$
19. $x = t^4 - 4, y = 8 - t^6,\ 0 \le t \le \sqrt{2}.$
20. $x = t^2 + 1, y = 1 - t^3,\ 0 \le t \le 2.$
21. $y = \frac{t^3}{3}, x = t^2,\ -1 \le t \le 1.$
22. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}.$
23. $x = t^2, y = \frac{t(t^2-3)}{3}.$
24. $x = 2(3\cos t - \cos 3t),\ y = 2(3\sin t - \sin 3t), 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
25. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t, 0 \le t \le 1.$
26. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, 0 \le t \le \pi.$
27. $x = 2(t^2 + 1), y = 2 - \frac{2(t^3 - 3t)}{3}.$
28. $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, 0 \le t \le \sqrt[4]{8}.$
29. $x = \frac{\sin t}{\sqrt{8}}, y = \frac{\sin t\cos t}{8}, 0 \le t \le 2\pi.$
30. $x = 2 - \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^6}{6}, 0 \le t \le \sqrt[4]{8}.$

8. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1. $r = 1 + \cos\varphi.$
2. $r = 3(1 - \cos\varphi).$
3. $r = 2(1 - \sin\varphi).$
4. $r = 2\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right).$
5. $r = \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right).$
6. $r = 2e^{4/3\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$
7. $r = 2(1 + \cos\varphi).$
8. $r = 3\varphi^2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$
9. $r = 5\varphi^2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$
10. $r = \cos^5\varphi.$
11. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$
12. $r = 2(1 + \sin\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$
13. $r = \sin\varphi - \cos\varphi.$
14. $r = \sin^2\frac{\varphi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$
15. $r = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
16. $r = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
17. $\varphi = \sqrt{r},\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$
18. $r = \cos^5 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi.$
19. $r = 3\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{4}{3}.$
20. $r = \cos^3\frac{\varphi}{3}, 0 \le \varphi \le \pi.$
21. $r = \sin\varphi + \cos\varphi.$
22. $r = \cos^4\frac{\varphi}{4}.$
23. $r = 2\cos^4\frac{\varphi}{4}.$
24. $r = 3\sin^4\frac{\varphi}{4},\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

25. $r = 2\sin^4\frac{\varphi}{4}, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
26. $r = 2 + 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$
27. $r = 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$
28. $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3},\ a > 0, 0 \le \varphi \le \pi.$
29. $r = 8\sin^4\frac{\varphi}{4},\ 0 \le \varphi \le \pi.$
30. $r = 4\cos^3\frac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le \pi.$

9*. Применение определенного интеграла.

I. С помощью подъёмного крана извлекают железобетонную деталь со дна реки глубиной h *м*. Какая работа при этом совершается, если деталь имеет форму правильного тетраэдра с ребром a *м*? Плотность железобетона 2500 *кг/м*^{3}, плотность воды 1000 *кг/м*^{3}.

1. $h = 5$*м*; $a = 1$*м*.
2. $h = 6$*м*; $a = 2$*м*.
3. $h = 5$*м*; $a = 2$*м*.
4. $h = 7$*м*; $a = 1,5$*м*.
5. $h = 6$*м*; $a = 1,2$*м*.
6. $h = 7$*м*; $a = 1$*м*.

II. Найти силу давления на пластинку, имеющую форму равнобокой трапеции, верхнее основание которой a *м*, нижнее b *м*, а высота h *м*, погруженную вертикально в воду на глубину c *м*. Плотность воды 1000 *кг/м*^{3}.

7. $a = 0,1$*м*; $b = 0,2$*м*; $c = 0,3$*м*; $h = 0,5$*м*.
8. $a = 0,1$*м*; $b = 0,3$*м*; $c = 0,3$*м*; $h = 0,4$*м*.
9. $a = 0,2$*м*; $b = 0,4$*м*; $c = 0,1$*м*; $h = 0,5$*м*.
10. $a = 0,3$*м*; $b = 0,6$*м*; $c = 0,2$*м*; $h = 0,3$*м*.
11. $a = 0,2$*м*; $b = 0,5$*м*; $c = 0,1$*м*; $h = 0,2$*м*.
12. $a = 0,3$*м*; $b = 0,4$*м*; $c = 0,2$*м*; $h = 0,4$*м*.

III. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a *м*, радиус r *м*. Плотность воды 1000 *кг/м*^{3}.

13. $a = 1$*м*; $r = 0,3$*м*.
14. $a = 1,2$*м*; $r = 0,4$*м*.
15. $a = 1,5$*м*; $r = 0,4$*м*.
16. $a = 1,1$*м*; $r = 0,3$*м*.
17. $a = 1,4$*м*; $r = 0,5$*м*.
18. $a = 1,3$*м*; $r = 0,5$*м*.

IV. Труба имеет диаметр d *см*. Один конец её соединён с баком, в котором уровень воды на a *м* выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку. Плотность воды 1000 *кг/м*^{3}.

19. $d = 6$*см*; $a = 1$*м*.
20. $d = 8$*см*; $a = 1,2$*м*.
21. $d = 10$*см*; $a = 1,4$*м*.
22. $d = 12$*см*; $a = 1,6$*м*.
23. $d = 14$*см*; $a = 1,8$*м*.
24. $d = 16$*см*; $a = 2$*м*.

V. Какую силу давления испытывает прямоугольная пластинка длиной a *см* и шириной b *см*, если она наклонена к горизонтальной поверхности воды под углом α и её большая сторона находится на глубине h *см*? Плотность воды 1000 *кг/м*^{3}.

25. $a = 10$*см*; $b = 8$*см*; $\alpha = 30°$; $h = 30$*см*.
26. $a = 15$*см*; $b = 10$*см*; $\alpha = 30°$; $h = 20$*см*.
27. $a = 16$*см*; $b = 12$*см*; $\alpha = 45°$; $h = 10$*см*.
28. $a = 18$*см*; $b = 15$*см*; $\alpha = 45°$; $h = 20$*см*.
29. $a = 20$*см*; $b = 18$*см*; $\alpha = 60°$; $h = 30$*см*.
30. $a = 14$*см*; $b = 10$*см*; $\alpha = 60°$; $h = 15$*см*.

10. Вычислить несобственный интеграл.

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x}dx.$ 2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$ 3. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$

4. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$ 5. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 6. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}.$ 8. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}.$ 9. $\int\limits_0^{1} \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx.$

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}.$ 11. $\int\limits_0^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}.$ 12. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{(1-x)^2}\cos\frac{\pi}{1-x}dx.$

13. $\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$ 14. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$ 15. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$

16. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$ 17. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}.$ 18. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}dx.$

19. $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ 20. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 21. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

22. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$ 23. $\int\limits_1^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$ 24. $\int\limits_2^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

25. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx.$ 26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^3)^2}.$ 27. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ 29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}.$ 30. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}.$

11. Найти и изобразить в плоскости xOy область определения функции.

1. $z=\frac{xy}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}.$ 2. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+2\ln(9-x^2-9y^2).$

3. $z=\frac{x}{y}-\ln((x+2)(1-y)).$ 4. $z=\frac{1}{\sqrt{5x^2+9y^2-30x+18y+9}}.$

5. $z=\frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}.$ 6. $z=\sqrt{(x-y)(y+2x-4)}.$

7. $z=\frac{1}{x}+\ln(4x-y^2+8).$ 8. $z=\frac{2x-y}{\ln(1-x^2+y)}.$

9. $z=\frac{1}{x-y}+\frac{\ln y}{\sqrt{2x+3y}}.$ 10. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}+\frac{x-1}{x^2+y^2-4}.$

11. $z=\frac{3-\sqrt{xy}}{y-x^3}.$ 12. $z=\sqrt{x^2+y^2-9}+\ln(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}).$

13. $z=\frac{\ln x+\sqrt{y}}{y-x^2}.$ 14. $z=\sqrt{3y}+\frac{x}{\sqrt{1-x-y}}.$

15. $z=2-\arccos(1-x-y).$ 16. $z=\sqrt{x^2-y^2-1}-\ln(9-x^2-y^2).$

17. $z=\sqrt{y-x^2}+\frac{xy}{y-2}.$ 18. $z=\ln\frac{x}{y}+\frac{x+y}{y-x^3}.$

19. $z=\sqrt{(x+y)(y-2)}.$ 20. $z=3x+\arcsin(2x-y).$

21. $z=\sqrt{e^{xy}(x-y^2)}.$ 22. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}+\sqrt{x^2+y^2-4}.$

23. $z=\frac{\ln((x-1)(y+2))}{x-y}.$ 24. $z=\sqrt{11-4x^2+16x-9y^2+18y}.$

25. $z=\arcsin\frac{x-y}{2}+\frac{1}{xy}.$ 26. $z=\sqrt{9-9x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-9}.$

27. $z=\sqrt{y-x}-3\ln\frac{x^2}{y}.$ 28. $z=\ln(x^2+4y^2-2x-8y-1).$

29. $z=\frac{\sqrt{4y-x^2-y^2}}{x^2+y^2-2y}.$ 30. $z=\ln[(1-x)(y-2)]+\frac{1}{x+1}.$

12. Применяя полный дифференциал, приближенно вычислить (считать $\frac{\pi}{2}\approx 1,57$, $1^0=\frac{\pi}{180}\approx 0,017$).

1. $\sqrt[3]{(2,92)^2-(1,03)^2}.$ 2. $\sqrt{(1,02)^2+(0,05)^2}.$ 3. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right).$

4. $\sqrt{e^{0,03}+5\cdot(2,97)}.$ 5. $\sqrt{(1,04)^{1,99}+\ln(1,02)}.$ 6. $\sqrt{(0,98)^3+(2,02)^3}.$

7. $\sin 28^0\cdot\operatorname{tg}44^0.$ 8. $\sqrt{(1,04)^4+(1,98)^3}.$ 9. $\sqrt{3e^{0,02}+11\cdot(1,97)}.$

10. $\ln((1,02)^3-(0,03)^2).$ 11. $4-3\cdot(0,89)^{2,02}.$ 12. $3-(0,98)^{1,05}.$

13. $\sqrt{\cos 1,55+(3,98)^2}.$ 14. $\sqrt{(4,05)^2+(2,96)^2}.$ 15. $\sqrt{11,97+(2,02)^2}.$

16. $\ln((0,97)^2-(0,08)^2).$ 17. $\sqrt{(1,05)^3+(1,97)^3}.$ 18. $(6,03)^3\cdot\sin 29^0.$

19. $\sqrt{\sin^2 1,55+8e^{0,02}}.$ 20. $\sqrt[3]{(2,01)^3+117,1}.$ 21. $\operatorname{arctg}\frac{1,04}{0,92}.$

22. $\cos 61^0-2\cdot\operatorname{tg}44^0.$ 23. $(1,02)^3\cdot(0,97)^2.$ 24. $\ln(0,09^3+0,99^3).$

25. $\sqrt[3]{(1,09)^5+7,05}.$ 26. $3-(2,03)^2\cdot(3,98)^3.$ 27. $(3,03)^{2,02}-4.$

28. $\cos 59^0\cdot\operatorname{tg}46^0.$ 29. $(0,97)^{1,08}+(1,04)^{2,03}.$ 30. $(0,96)^2\cdot(1,02)^3.$

13. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.

1. $xyz-z^3+zy-x+1=0;\ M(1;2;2).$
2. $z^2x-x^2y+y^2z+2x-y-6=0;\ M(5;1;2).$
3. $z=(x-y)^2+xy-\frac{3x}{y};\ M(2;2;1).$
4. $z=3\left(\frac{1}{x}+y\right)^2-2\frac{x^2}{y^2};\ M(1;1;10).$
5. $5(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+xz)-9=0;\ M(1;1;1).$
6. $(x+y-z)^2-3y+2x-z-13=0;\ M(1;2;-1).$
7. $(z+2y)^2-(x+4y-2z)=0;\ M(-1;2;-1).$

8. $z^3+3x^2y+xz+y^2z^2+y-2x-20=0$; $M(-1;2;-2)$.
9. $x^2-y^2+z^3-2x+yz-8=0$; $M(3;-1;2)$.
10. $z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}=2$; $M(-2;3;3)$.
11. $3x^2-y^2+\sqrt{x+z}+3y-5z+2=0$; $M(4;-4;5)$.
12. $x^3+y^3+z^3-3xyz+2x-3y-30=0$; $M(2;2;-2)$.
13. $4-x^2-y^2+z^2-z+3x-5y-16=0$; $M(1;-1;3)$.
14. $xz-yx+yz+2x-3y+2z=0$; $M(1;-2;-10)$.
15. $xy-yz+2x+z^2-3=0$; $M(-1;-2;-3)$.
16. $xz^2-x^2y+y^2z+2x-y-10=0$; $M(1;2;2)$.
17. $z=x^2-xy^2-2x+3y$; $M(2;-1;-5)$.
18. $z^3+3x^2y+2xz+yz-2x+y+2=0$; $M(1;-2;2)$.
19. $z=x^2y-xy^3+xy-2x-y$; $M(1;-1;-2)$.
20. $xyz-2(x^2+y^2+z^2)+5=0$; $M(1;-1;-1)$.
21. $(x+2y-z)^2-xz=0$; $M(2;1;2)$.
22. $x\ln z-z\ln y+2y\ln x+2x-2z=0$; $M(1;1;1)$.
23. $xyz=x+2y-3z^2+21$; $M(-1;-2;2)$.
24. $z^2\ln x-x^2\ln z+y^2xz-4=0$; $M(1;2;1)$.
25. $x^2+y^2+5z^2-6xy+6xz-6yz-25=0$; $M(1;-1;1)$.
26. $(x-1)^2+(y+z)^2-(1-z)^2+yx+yz=0$; $M(1;-1;-1)$.
27. $x^2+y^2+z^2-2(x+2)+4(z-1)^2-(y+1)^2-1=0$; $M(-1;-1;1)$.
28. $xyz+\frac{x^2}{2}-3y+2z-\frac{y^2}{2}-3=0$; $M(1;1;2)$.
29. $x^2y-y^2z+z^2x-2x+3y-5z+10=0$; $M(-1;1;2)$.
30. $(x+2y-z)^2-(y+2z)^2+24=0$; $M(1;1;2)$.

14. Найти производную функции U в точке M в направлении вектора $\vec{l}$.

1. $U=4-x^2-y^2+z^2-z$; $M(-1;2;-1)$; $\vec{l}=(8;4;1)$.
2. $U=2xyz-x^2+y^2$; $M(2;1;-1)$; $\vec{l}=(12;3;4)$.
3. $U=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+z$; $M(1;-1;2)$; $\vec{l}=(2;3;6)$.
4. $U=xy-yz+2x+z^2$; $M(-2;1;2)$; $\vec{l}=(-4;8;1)$.
5. $U=z^2x-x^2y+y^2z+2x-y$; $M(1;-1;3)$; $\vec{l}=(-4;-3;12)$.
6. $U=xyz-z^3+zy-x+2$; $M(1;-1;-1)$; $\vec{l}=(-2;3;6)$.
7. $U=3(x^2+y^2+z^2)-xy$; $M(1;1;1)$; $\vec{l}=(-3;12;4)$.
8. $U=3x^2-2y^2+z^2-xyz$; $M(-1;1;1)$; $\vec{l}=(1;2;2)$.
9. $U=xyz^2-\ln(2+x^2)$; $M(1;2;-2)$; $\vec{l}=(4;-1;8)$.
10. $U=3x^2z-xy+\sqrt{x+y}$; $M(4;5;1)$; $\vec{l}=(3;-12;4)$.
11. $U=x^2-y^2+z^3-2x+yz-1$; $M(2;-1;1)$; $\vec{l}=(-2;-3;6)$.
12. $U=\sqrt{4-xy}+xz-2yz^2$; $M(1;-5;2)$; $\vec{l}=(-4;-8;1)$.
13. $U=z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}-2$; $M(2;3;-1)$; $\vec{l}=(3;-4;12)$.
14. $U=(x+y-z)^2-3xyz$; $M(1;1;-1)$; $\vec{l}=(2;-3;-6)$.
15. $U=\frac{x}{y}-(x+2y+z)^2$; $M(1;-1;1)$; $\vec{l}=(-1;2;-2)$.
16. $U=x\ln z-z\ln y+2y\ln x$; $M(1;1;2)$; $\vec{l}=(8;4;-1)$.
17. $U=\operatorname{arctg}(xy)+\operatorname{arctg}(yz)$; $M(1;-1;-1)$; $\vec{l}=(-12;4;3)$.
18. $U=z^2\ln x-x^2\ln y+y^2\ln z$; $M(1;1;1)$; $\vec{l}=(3;-2;-6)$.
19. $U=3xyz-x^2-y^2-z^2$; $M(1;-1;2)$; $\vec{l}=(8;-1;4)$.
20. $U=xyz-2(x^2+y^2+z^2)$; $M(1;-1;1)$; $\vec{l}=(-12;-4;3)$.
21. $U=(x+2y-z)^2-xz$; $M(-1;2;1)$; $\vec{l}=(3;-6;2)$.
22. $U=\sqrt{(1+x)(12-y)}+z^2-zx$; $M(3;3;-1)$; $\vec{l}=(1;-8;4)$.
23. $U=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{2}{z}+5$; $M(1;1;-1)$; $\vec{l}=(2;-1;2)$.
24. $U=(1+2x)^3-xy+z^2-zy$; $M(-1;2;-1)$; $\vec{l}=(4;-12;3)$.
25. $U=x^2+y^2+5z^2-6xy+6xz-6yz$; $M(1;1;1)$; $\vec{l}=(6;-2;3)$.
26. $U=(x-1)^2+(y+2)^2-(1-z)^2+zy$; $M(1;-1;1)$; $\vec{l}=(-1;8;-4)$.
27. $U=-2(x+2)+4(z-1)^2-(y+1)^2$; $M(1;1;1)$; $\vec{l}=(-4;12;-3)$.
28. $U=(x+y-2)^2+(x-z+1)^2$; $M(1;-1;-1)$; $\vec{l}=(-2;-1;2)$.
29. $U=z^2-2x^2+y^2-3(z+y)$; $M(-1;1;-1)$; $\vec{l}=(6;-2;-3)$.
30. $U=(x+2y-z)^2-2(y+2z)$; $M(1;1;1)$; $\vec{l}=(-8;-4;1)$.

15. Задачи на градиент и производную по направлению.

I. Найти угол между градиентами функции z в точках A и B.

1. $z=\ln\frac{y}{x}$; $A(1/2;1/4)$; $B(1;1)$.
2. $z=\sqrt{x^2-y^2}$; $A(5;3)$; $B(4;2)$.
3. $z=x^3+y^3-3xy$; $A(2;1)$; $B(0;3)$.
4. $z=\frac{y^2}{x}$; $A(3;1)$; $B(-2;-1)$.
5. $z=\operatorname{arctg}xy$; $A(1;1)$; $B(-1;-1)$.
6. $z=\ln(x^2+y^2)$; $A(1;-1)$, $B(2;2)$.
7. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; $A(0;1)$; $B(-1;1)$.
8. $z=\frac{x^3+y^3}{x-y}$; $A(2;-1)$; $B(3;4)$.
9. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $A(2;1)$, $B(5;3)$.
10. $z=y\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{y}}$; $A(1;4)$; $B(9;1)$.

II. Найти угол между градиентами функций z_1 и z_2 в точке M.

11. $z_1=\frac{2x+3y}{x-y}$; $z_2=-2xy^{-1}$; $M(3;4)$.
12. $z_1=y\sqrt[3]{x}$; $z_2=\left(\frac{y}{x}\right)^2$; $M(1;8)$.
13. $z_1=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $z_2=\sqrt{x+2y}$; $M(1;1)$.
14. $z_1=\frac{4}{x^2+y^2}$; $z_2=4-x^2-y^2$; $M(-1;2)$.
15. $z_1=\frac{xy}{x-y}$; $z_2=\frac{y}{2x}$; $M(-1;2)$.

16. $z_1 = xe^{-yx}, z_2 = x^3 + 3x^2y - y^3$; $M(-1;0)$.
17. $z_1 = \arcsin\dfrac{y}{x}; z_2 = \dfrac{x}{3y-2x}$; $M(2;1)$.
18. $z_1 = x^y; z_2 = \dfrac{x+y}{x^2-y}$; $M(1;2)$.
19. $z_1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; z_2 = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$; $M(2;1)$.
20. $z_1 = \dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}; z_2 = \ln\dfrac{x}{y}$; $M(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$.

III. Найти максимально возможное значение производной по направлению функции z в точке M.

21. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; $M(4;3)$.
22. $z = -2xy^{-1}$; $M(1;4)$.
23. $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$; $M(1;1)$.
24. $z = \dfrac{x^3}{x-y}$; $M(3;2)$.
25. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $M(0;2)$.
26. $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$; $M(1;4)$.
27. $z = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$; $M(1;3)$.
28. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; $M(1;1)$.
29. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$; $M(4;16)$.
30. $z = 2y\sqrt[3]{x}$; $M(1;-1)$.

16. Найти функцию $z(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

1. $(x + y\ln x)dy + \left(\dfrac{y^2}{2x} + y + 1\right)dx$.
2. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3 - 1)dy$.
3. $\dfrac{2x}{y^3}dx + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}\right)dy$.
4. $(3x^2y + y^3 - 1)dx + (x^3 + 3xy^2 - 2)dy$.
5. $\left(2x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{x} + 2\right)dy$.
6. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy$.
7. $(y^3 + yx^2)dy - (x^3 - xy^2 + 1)dx$.
8. $(2xy + e^x + y)dx + (x + x^2 + y^2)dy$.
9. $(4x + 3y + 5)dx + (3x - 6y^2 - 3)dy$.
10. $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx + \dfrac{2y}{x^3}dy$.
11. $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y + 2)dy$.
12. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy$.
13. $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy$.
14. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy$.
15. $(x^2 - 3xy^2 + 1)dx + (y^3 - 3yx^2 + 2)dy$.
16. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy$.
17. $\left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{y}\right)dx - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2} + 2y\right)dy$.

18. $(3y - 6x^2 - 3)dx + (3x + 4y + 5)dy$.
19. $x(y^2 + 2x^2 - 3x)dx + y(2y^2 - y + x^2)dy$.
20. $(y + x\ln y)\,dx + \left(\dfrac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy$.
21. $\left(x - \dfrac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{\sin 2y}{x} + y\right)dy$.
22. $(e^x + y + y\cos x)dx + (e^{2y} + x + \sin x - 1)dy$.
23. $(6y^2x + 4x^3 - 2)dx + (3y^2 + 6yx^2 - 1)dy$.
24. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2 + 3)dy$.
25. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + (2xy - e^{-y})dy$.
26. $(2x - y + e^x - 5)dx + (2y - x + y^2 + 1)dy$.
27. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2 + 2)dy$.
28. $(2x^2 + xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 2y^2 - e^{-y})dy$.
29. $(y^3 - \cos x + 1)dx + (3xy^2 + \sin y + 2)dy$.
30. $(2x - y + 3x^2 - 1)dx + (3y^2 - 2y - x + 2)dy$.

17. Найти экстремумы функции.

1. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$.
2. $z = 7 - x^2 - xy - y^2 + 3x - 6y$.
3. $z = 2 - 6x + 2y - x^2 - y^2$.
4. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 - 4x + 18y + 10$.
5. $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.
6. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - 3y^2 - 8xy$.
7. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
8. $z = xy - x^2 - y^2 - 3x + 2y - 1$.
9. $z = 15 - 4x + 6y + x^2 + y^2$.
10. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 5$.
11. $z = 1 - y + x + x^2 + xy + y^2$.
12. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.
13. $z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$.
14. $z = 2xy(6 - x - y)$; $x > 0$, $y > 0$.
15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
16. $z = x^3y^3(3 - x - y)$; $x > 0$, $y > 0$.
17. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.
18. $z = x^3 + xy^2 + 2xy - 11x$.
19. $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$.
20. $z = x^3 + y^3 + 6xy - \dfrac{8}{27}$; $x < 0$, $y < 0$.
21. $z = 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 10$.
22. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$.
23. $z = x^2 + y^2 - 4y + 4$.
24. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.
25. $z = x^2y(4 - x - y)$; $x > 0$, $y > 0$.
26. $z = x^3 + y^3 - 15xy + 1$; $x > 0$, $y > 0$.
27. $z = xy^2(1 - x - y)$; $x > 0$, $y > 0$.
28. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 16$; $x > 0$, $y > 0$.
29. $z = x^2 - 2xy + y^3 - y^5$.
30. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 6y - 7$.

18*. Найти оптимум.

1. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

2. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

3. Даны три точки $A(4;0;4), B(4;4;4)$ и $C(4;4;0)$. Найти на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ такую точку S, чтобы объем пирамиды $SABC$ был наибольшим.

4. При каких размерах прямоугольного открытого ящика с заданным объемом $V = 32м^3$ его поверхность будет наименьшей?

5. В шар радиуса r вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

6. Шатер имеет форму цилиндра, завершенного сверху прямым круговым конусом. При данной полной поверхности шатра определить его измерения так, чтобы объем был наибольшим.

7. Определить размеры конуса наименьшей боковой поверхности при условии, что его объем равен V.

8. Определить наружные размеры котла цилиндрической формы с заданной толщиной стенок d и емкостью V так, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала.

9. Нужно построить конический шатер наибольшего объема из данного количества материала S. Каковы должны быть его размеры?

10. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$ наименьшая.

11. Даны три точки $A(4;0;4)$, $B(4;4;4)$ и $C(4;4;0)$. Найти на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ такую точку S, чтобы объем пирамиды $SABC$ был наименьшим.

12. Шатер имеет форму цилиндра, завершенного сверху прямым круговым конусом. При данном объеме шатра определить его измерения так, чтобы его полная поверхность была наименьшей.

13. Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна 24, найти наибольший по площади.

14. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

15. Положительное число a разбить на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

16. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

17. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, площадь поверхности которой равна $3\pi м^2$, имеет наибольшую вместимость?

18. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем.

19. На плоскости xOy найти точку $M(x,y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0, y = 0, x - y + 1 = 0$ была бы наименьшей.

20. Через точку $M(a,b,c)$ провести плоскость, образующую с координатными плоскостями тетраэдр наименьшего объема.

21. В эллипсоид вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

22. В какой точке эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади?

23. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

24. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1;2;3)$ до прямой, заданной уравнениями $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

25. Найти длины полуосей эллипса $36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180$.

26. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1;0)$ до эллипса, заданного уравнением $4x^2 + 9y^2 = 36$.

27. Среди всех треугольников данного периметра $2p$ найти треугольник наибольшей площади.

28. Среди всех треугольников, вписанных в круг радиуса R, найти треугольник наибольшей площади.

29. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.

30. На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки $(0;0;3)$.

19. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ изобразить область D на чертеже, перейти к повторному, расставить пределы интегрирования в различных порядках, если область интегрирования ограничена линиями:

1. $y = -\sqrt{1-x^2}, y = 1 - x, x = 0.$	2. $y = \dfrac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}; x \le 2.$
3. $y = 0.5x + 1; y = 7 - x; x = 0.$	4. $y = x^2; y = x + 2, x \ge 0.$
5. $y = -x^2, y = x^2; x = 1.$	6. $y = 0, x = 0.5y + 1; x = 7 - y.$
7. $x = 0; x \le 2y + 1; x = 4 - y^2.$	8. $y = \dfrac{4}{x}, x = 1, y = 0, x = 2.$
9. $y = 0, y = 2, x = y^2, x = y^2 + 2.$	10. $x = 0; x \le 1.5y; x = \sqrt{25 - y^2}.$
11. $x = 0.25y^2, x = 2\sqrt{y}, y \le 2.$	12. $y = 0, y = (x-2)^2; y = x.$
13. $y = e^{-x^2}; x = 0; x = 1; y = 0.$	14. $y \ge 0, y \le x; x^2 + y^2 = 1.$
15. $y = \sqrt{x}, x + y = 0; y = 1.$	16. $x = \cos y, x = 0, y = 0.$
17. $y = \sqrt{2 - x^2}; y = x^2.$	18. $y = x + \dfrac{1}{x}, y = 1; x = 1; x = 2.$
19. $y = 2x - x^2; y = x - 2.$	20. $y = e^{1/x}. y = 0, x = 1; x = 2.$
21. $y = x, y = 2x, x + y = 6.$	22. $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4 - x^2}.$
23. $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4.$	24. $y = \dfrac{2x}{x+1}; x = -0.5; y = 0; y = 1.$
25. $x^2 - y^2 = 1, x = 2, x = 3.$	26. $x = 0; x = 4; y = 2 - 0.5x^2, y = 3 + 0.5x^2.$
27. $y = \ln x; x = 3, y = 0.$	28. $y = 0, y = 4, x = 2 - 0.5y^2, x = 3 + 0.5y^2.$
29. $x^2 + y^2 = 1.$	30. $y^2 + x^2 = 4x; y^2 + x^2 = 8x; y = 2x; y = x.$

20. Вычислить объем тела, образованного данными поверхностями.

1. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 4,\ z = 0.$
2. $x = 0,\ y = 0,\ 6x + 3y + 2z = 6,\ z = 0.$

3. $x+y+z=2,\ 3x+y=2,\ y=0,\ z=0,\ 3x+2y=4.$
4. $z=0,\ y+z=2,\ 2y=x^2.$
5. $z=4x^2+2y^2+1,\ x+y=3,\ z=0,\ x=0,\ y=0.$
6. $z=x^2+y^2,\ x=y^2,\ x=2,\ z=0.$
7. $z=4-x^2,\ y=5,\ y=0,\ z=0.$
8. $z=1-x^2,\ x+y=1,\ y=0,\ y=2x,\ z=0.$
9. $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$
10. $z=4-x^2-y^2,\ z=0,\ x=-1,\ x=1,\ y=-1,\ y=1.$
11. $z=1+x^2+y^2,\ y=0.5x,\ y=x,\ y=1,\ z=0.$
12. $2-x-y-2z=0,\ z=0,\ y=x^2,\ y=x.$
13. $z=x^2+y^2+1,\ x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=4,\ z=0.$
14. $z=\dfrac{y^2}{2},\ 2x+3y-12=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$
15. $z=0,\ x=y,\ x+y=3,\ 2x+y=6,\ x+y+z=1.$
16. $z=2-x,\ z=0,\ y=2\sqrt{x},\ y=0.25x^2.$
17. $z=x^2,\ z=0,\ 2x-y=0,\ x+y=9.$
18. $z=0.25y^2,\ z=0,\ 2x-y=0,\ x+y=9.$
19. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ y=x^2,\ y=1.$
20. $z=a-x,\ z=0,\ y^2=ax,\ a>0.$
21. $z=4-y^2,\ y=\dfrac{x^2}{2},\ z=0.$
22. $z=x^2+y^2+1,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$
23. $z=y,\ z=0,\ x=0,\ x=4,\ y=\sqrt{25-x^2}.$
24. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ x=0,\ y=0,\ x+y=1.$
25. $z=4-x-y,\ y=2-x,\ y=2,\ x=2,\ z=0.$
26. $z+x=1,\ x=y^2,\ z=0.$
27. $x+y=6,\ y=\sqrt{3x},\ z=4y,\ z=0.$
28. $z=x^2+y^2,\ y=-x^2,\ y=-1,\ z=0.$
29. $z=y^2,\ z=0,\ x=0,\ x+y=2.$
30. $z=0,\ z=2-y,\ y=x^2.$

21*. Для плоской фигуры (пластинки), ограниченной линией L, найти координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей Ox, Oy и точки $O(0;0)$. Если в условии задачи не дана плотность $\rho(x,y)$, то пластинка считается однородной ($a>0,\ b>0,\ b<a$).

1. $L: y^2=4x+4,\ y^2=-2x+4.$
2. L : круговой сектор радиуса a с углом при вершине 2α.
3. $L: y=2x, x=1, y=0;\ \rho(x,y)=x+y.$
4. $L: y=\sin x, y=\dfrac{2}{\pi}x, x\geq 0.$
5. $L: x+y=2, x=2, y=2.$
6. $L: r=a(1+\cos\varphi).$
7. $L: r^2=2a^2\cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}.$

8. $L: x/a+y/b=1, x=0, y=0;\ \rho(x,y)=2y+1.$
9. $L: x+y=2, x=0, y=0;\ \rho(x,y)=x+2y.$
10. $L: y^2=4x, x=2, y\geq 0;\ \rho(x,y)=2x+y.$
11. $L: y^2=ax, x=a, y=0, y\geq 0.$
12. $L: r^2=a^2\cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}.$
13. $L: y=b, y=0, x=0, x=a.$
14. L : треугольник $ABC: A(1;1), B(2;1), C(3;3)$.
15. $L: y=4-x^2, y=0$.
16. $L: y=\sin x, y=0, 0\leq x\leq\pi.$
17. $L: y=\cos x, y=0, x=0, x=\dfrac{\pi}{4}.$
18. $L: y^2=ax, y=x.$
19. L : треугольник $ABC: A(0;2a), B(a;0), C(a;a)$.
20. $L: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1, \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}\geq 1.$
21. $L: y=\sin x, y=0, 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}.$
22. $L\cdot \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, y\geq 0.$
23. $L: y=-\sqrt{R^2-x^2}, y=0.$
24. $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, x\geq 0.$
25. $L: y^2=ax, x=a, y\leq 0.$
26. L: сектор кругового кольца с центральным углом α и радиусами r и R.
27. $L: y=2-x^2, y=0.$
28. $L: \rho=a(1-\cos\varphi).$
29. $L: y^2=2x, x=2.$
30. $L: y=\sqrt{R^2-x^2},\ y=0.$

22*. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями ($a>0,\ b>0$).

1. $(x^2+y^2)^3=a^2y^4.$
2. $(x^2+y^2)^3=a^2x^4.$
3. $(x^2+y^2)^2=4ay^3.$
4. $x^4=a^2(x^2-y^2).$
5. $(x^2+y^2)^2=a^2x^3.$
6. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$
7. $(x^2+y^2)^2=4a^2x^3.$
8. $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2.$
9. $y^3=2(y^2-x^2).$
10. $y=(x-4)^2, y=16-x^2.$
11. $x^2+4y^2=8.$
12. $x^2+y^2=-2y, y=-1, y=x.$
13. $(x^2+y^2)^2=2a^2(y^2-x^2).$
14. $(x^2+y^2)^2=2ax^3.$
15. $x^2=2ay, y^2=2ax.$
16. $(x^2+y^2)^2=4y^3.$
17. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$
18. $\rho=2+\cos\varphi.$
19. $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4.$
20. $(x^2+y^2)^2-4xy=0.$
21. $y=1-x^2, y=-2.$
22. $x=4y-y^2, x+y=6.$

23. $y = \frac{(x-a)^2}{a}, x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0.$
24. $x^2 + y^2 = a^2, x + y = a, y = 0.5a, x \geq 0, y \geq 0.5a.$
25. $xy = a^2, x^2 = ay, y = 2a, x = 0.$
26. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, y = x, y = 0, x \geq 0, y \geq 0.$
27. Окружностью $x^2 + y^2 = 5$, касательной к ней $x + 2y - 5 = 0, y = 0$.
28. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x = 0.5, x = 0, y = 0$.
29. $y = 4 - x^2, 3x - 2y - 6 = 0.$
30. $y = -2, y = x + 2, y = 2, y^2 = x.$

23*. Вычислить тройной интеграл.

1. $\iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz$, V область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$
2. $\iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz$, V — куб, ограниченный плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1.$
3. $\iiint\limits_V (1-y)xz\,dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$
4. $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz$, V — параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 2, z = 5.$
5. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz,}{(x+y+z+1)^3}$, V ограничена плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$
6. $\iiint\limits_V y^2(e^{xy} - e^{-xy})dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 0, y = -2, y = 4x, z = 0, z = 2.$
7. $\iiint\limits_V (y^2 + z^2)dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = x + y.$
8. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 1.$
9. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 1, y = 0, y = 10x, z = 0$ и параболоидом $z = xy.$
10. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 0, x = 2, y = 0, y = \pi, z = 0, z = 1.$
11. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$. V ограничена плоскостью $z = 2$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2.$

12. $\iiint\limits_V ((x+y)^2 - z)dxdydz$, V ограничена поверхностями $z = 0, (z-1)^2 = x^2 + y^2.$
13. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}z\,dxdydz$, V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z, z = 1.$
14. $\iiint\limits_V z(x^2+y^2)dxdydz$, V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $(x^2+y^2)^2 = z^3.$
15. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2, z = 1.$
16. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)^2dxdydz$, V — цилиндр, ограниченный поверхностью $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 2, z = 3.$
17. $\iiint\limits_V dxdydz$, V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4z, x^2 + y^2 \leq z^2.$
18. $\iiint\limits_V (y^2 + z^2)dxdydz$, V — цилиндр, ограниченный поверхностью $x^2 + y^2 = 16$ и плоскостями $z = -3, z = 3.$
19. $\iiint\limits_V dxdydz$, V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2 = 22$ и поверхностью параболоида $9z = x^2 + y^2.$
20. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2, z = 1.$
21. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, V — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$
22. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z.$
23. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$. V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$ и расположена в первом октанте.
24. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$ и расположена в первом октанте.
25. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
26. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0\ (z \geq 0).$
27. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 4.$
28. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$

29. $\iiint\limits_V xyz^2dxdydz$, V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=4$, плоскостями $x=0$, $y=0, z=0$ и расположена в первом октанте.

30. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, V ограничена поверхностями $1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0$.

24. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L. При вычислении интеграла по замкнутому контуру обходить контур против часовой стрелки ($a>0, b>0, R>0$).

1. $\int\limits_{AB}(xy-y^2)dx+xdy$; L: $y=2x^2$; $A(0;0), B(1;2)$.
2. $\int\limits_{AB}(x-y)dx+\frac{1}{2}x^2dy$; L: $y=2\sqrt{x}$; $A(0;0), B(1;2)$.
3. $\int\limits_{AB}(x^2-2x)dx+(y^2-2xy)dy$; L: $y=x^2$; $A(-1;1), B(1;1)$.
4. $\oint\limits_L(x+2y)dx+(x-y)dy$; L: $x=2\cos t, y=2\sin t$.
5. $\oint\limits_L(x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy$; L: $x=3\cos t, y=2\sin t$.
6. $\oint\limits_L xdy-ydx$; L: $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$.
7. $\int\limits_L\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$; L: отрезок AB: $A(1;2), B(3;6)$.
8. $\int\limits_L(x^2-y^2)dx-(x-y^2)dy$; L: ломаная ACB: $A(1;2)$, $C(3;2)$, $B(3;5)$.
9. $\int\limits_L(x^2+y)dx+(x+y^2)dy$; L: ломаная ACB: $A(2;1)$, $C(5;1)$, $B(5;3)$.
10. $\oint\limits_L xdy-ydx$; L: ломаная $ABCA$: $A(-1;0), B(1;0), C(0;1)$.
11. $\int\limits_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y)dy$; L: $y=|x|$: $A(-1;1), B(2;2)$.
12. $\int\limits_{AB}\sin ydx+\sin xdy$; L: отрезок AB:$A(0;\pi), B(\pi;0)$.
13. $\int\limits_{AB}\frac{y}{x}dx+xdy$; L: $y=\ln x$; $A(1;0)$, $B(e;1)$.
14. $\int\limits_{AB}xdy-ydx$; L: $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$; $A(2\pi a;0)$, $O(0;0)$.
15. $\oint\limits_L(x+y)dx+(x-y)dy$; L: $x^2+y^2=4$.

16. $\oint\limits_L y^2dx-y^2dy$;$L$: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.
17. $\int\limits_{OM}xydx+(x+y)dy$; L: $y=x^2$; $O(0;0), M(1;1)$.
18. $\int\limits_{AB}2xydx+x^2dy$; L : любая линия; $A(1;0), B(0;3)$.
19. $\oint\limits_L\frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}$; L : ломаная $ABCA$: $A(1;1), B(2;1), C(2;2)$.
20. $\oint\limits_L ydx+ady$; L : граница области D, $D=\{x\ge 0, y\ge 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$.
21. $\oint\limits_L ydx+(x+y)dy$; L : $y=x^2, y=4$.
22. $\int\limits_{AB}(\cos 2y)dx-(2x\sin 2y)dy$; L : любая линия; $A(1;\frac{\pi}{6})$,$B(2;\frac{\pi}{4})$.
23. $\int\limits_L \operatorname{tg} ydx+\frac{1}{\cos^2 y}dy$; L : отрезок AB: $A(1;\frac{\pi}{6})$, $B(2;\frac{\pi}{4})$.
24. $\oint\limits_L(x^2+y^2)(xdx+ydy)$; L : $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.
25. $\oint\limits_L\frac{y}{x}dx+2\ln xdy$; L : ломаная $ABCA$: $A(1;0), B(2;0), C(1;2)$.
26. $\int\limits_L(6xy+4y^2+5y)dx+(3x^2+8xy+5x)dy$; L : отрезок AB : $A(2;1), B(1;2)$.
27. $\oint\limits_L(6xy+5y)dx+(3x^2+5y)dy$; L : $y=0, x=3, y=\sqrt{x}$.
28. $\int\limits_{AB}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$; AB: дуга астроиды $x=R\cos^3 t, y=R\sin^3 t$; $A(R;0)$, $B(0;R)$.
29. $\oint\limits_L y^2dx+(y+x)^2dy$; L : ломаная $ABCA$: $A(a;0), B(a;a)$, $C(0;a)$.
30. $\oint\limits_L(-x^2y)dx+xy^2dy$; L : $x^2+y^2=R^2$.

25*. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

1. $\iint\limits_S zdxdy+ydxdz+xdydz$, S — верхняя сторона плоскости $x+y+z=1$, ограниченной координатными плоскостями.
2. $\iint\limits_S -xdydz+zdzdx+5dxdy$, S — верхняя сторона части плоскости $2x-3y+z=6$, лежащей в четвёртом октанте.
3. $\iint\limits_S yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, S – внешняя сторона тетраэдра, ограниченного

плоскостями $x+y+z=2, x=0, y=0, z=0$.

4. $\iint\limits_S xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$.

5. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, S — положительная сторона куба, ограниченного плоскостями $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$.

6. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, S — внешняя сторона поверхности верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=1$.

7. $\iint\limits_S (x-y)\,dxdy+(z-x)dxdz+(y-z)\,dydz$, S — внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le 1$.

8. $\iint\limits_S yz\,dxdy+xzdydz+xy\,dxdz$, S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2+y^2=1$ и плоскостей $x=0, y=0, z=0, z=2$.

9. $\iint\limits_S z^3dxdy$, S — внешняя поверхность плоскости $x+y+z=10$, расположенная в первом октанте.

10. $\iint\limits_S zdydz-xdxdz+ydxdy$, S — верхняя сторона плоскости $3x+6y-2z-6=0$, ограниченной координатными плоскостями.

11. $\iint\limits_S 2xdydz+3ydxdz$, S — верхняя сторона плоскости $x+y+z=1$, ограниченной координатными плоскостями.

12. $\iint\limits_S ydxdz$, S — верхняя сторона части плоскости $1-x+y-z=0$, лежащей в четвёртом октанте.

13. $\iint\limits_S dydz+dzdx+zdxdy$, S — внешняя сторона поверхности параболоида $z=x^2+y^2, 0\le z\le 1$.

14. $\iint\limits_S -ydydz+xdxdz+zdxdy$, S — внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=1$, заключённая между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

15. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz$, S — верхняя сторона плоскости $y+z=1$, расположенная в первом октанте между плоскостями $x=0$ и $x=1$.

16. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, S — внешняя сторона поверхности верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=4$.

17. $\iint\limits_S xydydz+yzdxdz+xzdxdy$. S — внешняя сторона поверхности части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в первом октанте.

18. $\iint\limits_S dydz+2dxdz+3dxdy$, S — внешняя сторона боковой поверхности конуса, осью которого служит ось Oz, вершина находится в точке $M(0;0;1)$, а основание — круг радиуса 2, лежащий в плоскости xOy.

19. $\iint\limits_S (x-1)dydz+(y+3)dxdz+zdxdy$, S — внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le 1$.

20. $\iint\limits_S zdydz+(1-z)dxdz+xydxdy$, S — часть плоскости $x+y=1$, ограниченная плоскостями $z=0, z=1, x=0, y=0$, $\vec{n}$ — нормаль, образующая острый угол с осью Ox.

21. $\iint\limits_S xdydz+9ydxdz+18zdxdy$, S — верхняя сторона плоскости $x+2y+3z=1$, ограниченной координатными плоскостями.

22. $\iint\limits_S zdxdy$, S — часть конуса $z^2=x^2+y^2$, заключённая между плоскостями $z=0, z=1$, $\vec{n}$ — нормаль, образующая тупой угол с осью Oz.

23. $\iint\limits_S (1-yz)dydz+(1+xz)dxdz+2(x+y)dxdy$. S — внешняя сторона поверхности параболоида $z=x^2+y^2, 0\le z\le 1$.

24. $\iint\limits_S dydz+xdxdz-ydxdy$, S — верхняя сторона плоскости $2x+y-2z-2=0$, ограниченной координатными плоскостями.

25. $\iint\limits_S xdydz-xdxdz+3dxdy$, S — верхняя сторона части плоскости $2x-y+z-2=0$, лежащей в четвёртом октанте.

26. $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, S — верхняя сторона нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

27. $\iint\limits_S yzdxdy$, S — верхняя сторона части плоскости $2x+3y+4z=12$, лежащей в первом октанте.

28. $\iint\limits_S z^4dxdy$, S — внутренняя сторона поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$.

29. $\iint\limits_S ydydz-dxdz+zdxdy$, S — верхняя сторона части плоскости $x-y+2z-2=0$, лежащей в четвёртом октанте.

30. $\iint\limits_S xdydz-ydxdz+6zdxdy$, S — верхняя сторона части плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$, лежащей в первом октанте.

26*. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}$.

1. $\vec{F}=xy^2\vec{i}-yz\vec{j}+z^2\vec{k}$.
2. $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
3. $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.
4. $\vec{F}=x^2y\vec{i}+y^2z\vec{j}+z^2x\vec{k}$.
5. $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$.
6. $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$.
7. $\vec{F}=\frac{zy}{x}\vec{i}+\frac{xz}{y}\vec{j}+\frac{xy}{z}\vec{k}$.
8. $\vec{F}=yz^2\vec{j}+x\vec{k}$.
9. $\vec{F}=x\vec{i}+y^2\vec{j}+z^3\vec{k}$.

10. $\vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$. 11. $\vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}$. 12. $\vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$.
13. $\vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{x}\vec{j}$. 14. $\vec{F} = -\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{y}{x^2}\vec{k}$. 15. $\vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.
16. $\vec{F} = yz^2\vec{i} + x\vec{j}$. 17. $\vec{F} = x\vec{i} + yz^2\vec{k}$. 18. $\vec{F} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$.
19. $\vec{F} = (x - z^2)\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$. 20. $\vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$.
21. $\vec{F} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$. 22. $\vec{F} = yz\vec{i} + z(x + 2y)\vec{j} + y(x + y)\vec{k}$.
23. $\vec{F} = (x^3 + y^2 + z)\vec{i} + (y^3 + z^2 + x)\vec{j} + (z^3 + x^2 + y)\vec{k}$.
24. $\vec{F} = (x - y)(y - z)\vec{i} + (y - z)(z - x)\vec{j} + (z - x)(x - y)\vec{k}$.
25. $\vec{F} = (y^2 + z^2)(x + y)\vec{i} + (z^2 + x^2)(y + z)\vec{j} + (x^2 + y^2)(z + x)\vec{k}$.
26. $\vec{F} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{k}$.
27. $\vec{F} = x(y^2 - z^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(x^2 - y^2)\vec{k}$.
28. $\vec{F} = \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\vec{i} + \frac{1}{2}(z^2 + x^2)\vec{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\vec{k}$.
29. $\vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$.
30. $\vec{F} = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i} + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{j} + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{k}$.

27*. Вычислить ротор векторного поля $\vec{F}$.

1. $\vec{F} = xy^2\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}$. 2. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 3. $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
4. $\vec{F} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$. 5. $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$. 6. $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$.
7. $\vec{F} = \frac{zy}{x}\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}$. 8. $\vec{F} = yz^2\vec{j} + x\vec{k}$. 9. $\vec{F} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$.
10. $\vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$. 11. $\vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}$. 12. $\vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$.
13. $\vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{x}\vec{j}$. 14. $\vec{F} = -\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{y}{x^2}\vec{k}$. 15. $\vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.
16. $\vec{F} = yz^2\vec{i} + x\vec{j}$. 17. $\vec{F} = x\vec{i} + yz^2\vec{k}$. 18. $\vec{F} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$.
19. $\vec{F} = (x - z^2)\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$. 20. $\vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$.
21. $\vec{F} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$. 22. $\vec{F} = yz\vec{i} + z(x + 2y)\vec{j} + y(x + y)\vec{k}$.
23. $\vec{F} = (x^3 + y^2 + z)\vec{i} + (y^3 + z^2 + x)\vec{j} + (z^3 + x^2 + y)\vec{k}$.
24. $\vec{F} = (x - y)(y - z)\vec{i} + (y - z)(z - x)\vec{j} + (z - x)(x - y)\vec{k}$.
25. $\vec{F} = (y^2 + z^2)(x + y)\vec{i} + (z^2 + x^2)(y + z)\vec{j} + (x^2 + y^2)(z + x)\vec{k}$.
26. $\vec{F} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{k}$.
27. $\vec{F} = x(y^2 - z^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(x^2 - y^2)\vec{k}$.
28. $\vec{F} = \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\vec{i} + \frac{1}{2}(z^2 + x^2)\vec{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\vec{k}$.
29. $\vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$.
30. $\vec{F} = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i} + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{j} + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{k}$.

Таблица вариантов

В	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	6	9	17	26	9	7	24	15
2	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	14	10	4	9	24	15	6	17
3	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	25	14	5	21	23	18	6	28
4	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	6	9	17	26	9	26	10	18
5	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	14	10	4	9	24	15	6	10
6	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	18	3	14	5	18	5	21	2
7	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	19	13	14	28	18	14	5	22
8	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	30	12	24	7	20	14	15	11
9	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	25	14	5	21	23	15	6	6
10	9	9	27	8	29	28	17	20	17	5	14	10	19	8	21	28	1	12	29	9	9	27	8	29	14	20	4
11	10	1	12	26	21	7	17	23	21	21	19	23	3	8	5	7	29	24	22	1	12	26	21	7	14	16	16
12	14	1	12	16	6	11	23	14	29	9	4	30	15	26	29	19	13	3	17	18	3	14	5	18	15	6	12
13	28	23	16	5	18	27	14	25	5	13	27	4	10	22	5	23	24	4	14	30	12	24	7	20	14	21	23
14	27	21	22	22	14	13	26	27	20	9	2	7	9	9	26	10	23	2	28	9	9	27	8	29	18	6	2
15	12	12	22	24	4	14	9	16	3	3	21	24	14	7	3	27	17	13	12	19	13	14	28	18	26	10	18
16	6	9	27	7	13	26	21	25	15	17	30	12	14	28	16	21	5	4	23	1	12	26	21	7	5	21	11
17	8	3	6	12	10	5	30	3	4	22	21	27	28	30	29	9	9	19	27	9	9	27	8	29	15	6	8
18	9	19	2	3	28	16	20	29	3	19	23	10	13	30	18	19	15	23	19	3	28	16	20	29	14	13	12
19	8	1	20	16	19	21	16	18	11	20	24	21	12	12	5	13	25	8	15	12	9	19	2	3	13	5	7
20	3	5	4	2	21	13	21	28	17	11	29	3	8	14	17	27	29	28	29	30	12	24	7	20	11	15	14
21	14	1	7	23	17	19	21	7	14	30	27	11	26	20	11	24	26	8	27	1	12	26	21	7	14	21	26
22	3	28	16	20	29	29	18	29	2	11	14	21	8	22	3	9	15	21	14	22	3	28	16	20	14	24	8
23	22	28	6	8	22	1	1	18	6	15	25	29	7	24	14	25	18	27	11	3	28	16	20	29	15	6	5
24	23	22	19	27	27	4	20	14	23	29	17	2	27	11	29	9	1	13	4	14	19	13	14	28	18	4	15
25	22	29	15	23	5	3	9	13	11	10	13	12	2	18	25	29	25	19	29	3	28	16	20	29	18	6	22
26	28	23	19	23	21	14	30	26	26	23	28	12	23	9	7	20	13	25	25	22	29	15	23	3	26	10	20
27	12	9	15	13	11	19	18	29	4	15	30	4	7	25	12	8	15	2	8	28	23	19	23	21	5	21	16
28	26	19	25	27	15	8	21	10	19	20	15	22	18	2	30	25	12	25	17	3	28	16	20	29	1	25	20
29	8	15	23	30	9	30	24	6	2	30	12	11	14	6	21	24	25	3	30	3	28	16	20	29	14	12	20
30	10	11	15	17	23	1	22	19	23	8	10	24	2	3	29	25	14	20	28	22	29	15	23	5	12	15	13
31	5	5	13	16	9	7	21	26	21	9	24	23	19	10	1	3	20	4	21	28	23	19	23	21	17	23	29
32	30	14	23	16	6	25	30	4	11	24	19	23	13	6	28	9	14	24	3	25	4	13	13	14	15	21	5
33	17	27	19	28	16	14	30	13	30	5	27	11	2	4	18	5	17	3	11	22	29	15	23	12	15	6	19
34	22	7	21	6	1	2	17	4	21	1	4	20	3	24	30	21	5	23	5	28	23	19	23	21	14	17	21
35	8	23	15	2	25	4	13	13	14	5	14	4	28	16	25	19	18	5	6	29	13	18	9	17	14	5	12
36	29	13	18	9	17	14	6	24	2	10	5	4	27	9	4	19	21	25	12	10	13	11	11	26	18	6	8
37	11	26	20	5	4	28	25	18	6	1	21	6	19	28	10	4	5	27	7	21	25	12	10	13	5	21	15
38	21	10	14	2	1	24	28	12	5	9	26	13	23	14	30	2	9	17	18	25	4	13	13	14	13	25	13
39	2	2	8	20	23	10	22	19	29	15	26	6	11	24	3	18	18	25	26	29	13	18	9	17	14	17	7
40	15	10	13	11	11	26	28	25	30	12	30	26	10	5	17	14	21	3	2	10	13	11	11	26	8	29	28
41	21	30	17	2	14	9	26	16	26	24	2	15	10	5	7	11	20	24	10	21	25	12	10	13	14	12	2
42	11	1	8	13	1	15	20	8	18	18	16	5	30	7	18	7	10	15	7	29	13	18	9	17	1	15	23
43	29	10	7	29	17	20	28	21	15	16	4	14	1	23	8	30	4	29	17	10	13	11	11	26	16	21	8
44	25	15	16	30	6	21	20	1	21	20	17	13	14	4	15	25	25	2	20	25	4	13	13	14	15	6	16
45	30	2	20	9	30	18	1	5	11	7	12	1	22	6	14	17	17	7	22	21	25	12	10	13	7	13	9
46	21	24	8	20	2	20	22	20	21	14	13	26	30	8	12	3	20	19	2	8	20	2	20	22	12	9	20
47	13	21	9	6	12	15	25	21	8	20	21	20	23	15	6	16	1	29	3	23	19	16	8	20	26	10	2
48	22	10	26	1	26	20	6	22	25	20	15	15	30	5	3	19	19	20	2	15	15	18	27	21	5	21	20
49	29	9	28	24	14	5	26	1	10	9	28	19	3	8	17	21	3	2	29	23	11	1	8	13	11	23	20
50	14	24	13	7	9	17	2	24	10	18	2	13	21	18	6	8	13	13	4	23	19	16	8	20	4	12	26
51	26	6	30	8	29	21	13	1	15	26	20	10	29	2	22	28	24	6	26	15	15	18	27	21	8	29	14
52	12	29	8	29	6	27	19	20	13	22	19	14	14	10	26	14	17	23	11	8	20	2	20	22	11	2	16
53	21	16	10	11	29	18	23	23	24	12	20	29	15	6	24	15	15	18	27	21	25	12	10	13	18	9	24
54	5	19	22	26	22	23	10	28	4	11	1	20	8	30	23	6	16	4	18	23	19	16	8	20	15	6	15
55	15	15	2	16	15	16	21	15	21	24	11	14	23	28	23	10	14	9	9	23	11	1	8	13	18	15	8
56	20	8	16	22	27	16	3	3	11	26	23	19	18	18	14	10	21	23	26	14	26	6	30	8	1	23	7
57	22	16	16	15	19	6	13	10	17	1	9	16	3	9	26	23	17	24	7	8	20	2	20	22	18	6	17
58	16	5	9	28	30	7	3	27	19	28	28	15	13	30	29	10	27	29	4	15	15	18	27	21	5	21	29
59	3	3	1	15	29	15	30	8	13	29	3	7	8	20	10	2	22	28	15	23	11	1	8	13	12	15	13

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
60	27	20	21	16	17	1	30	13	14	27	28	25	10	2	15	12	23	19	16	8	20	2	20	22	18	12	9
61	3	24	22	29	23	28	29	23	21	25	27	13	2	13	6	25	17	14	8	14	26	6	30	8	26	10	30
62	13	23	19	11	6	20	9	15	5	27	27	19	17	21	7	27	8	17	4	29	22	20	6	9	15	6	2
63	22	14	19	23	22	5	14	6	21	7	13	23	22	19	18	5	26	28	29	23	11	1	8	13	18	6	10
64	12	14	6	15	17	26	22	25	21	27	27	20	29	20	23	27	20	23	26	15	2	16	15	16	5	21	7
65	21	28	4	1	8	22	30	2	4	27	22	19	1	17	4	23	21	22	7	30	11	23	11	1	17	3	3
66	9	10	3	21	12	24	13	25	20	26	21	29	17	21	26	28	24	10	13	20	8	1	27	13	4	15	23
67	23	17	8	8	2	24	30	17	18	11	28	12	4	2	6	7	10	20	23	23	14	6	10	19	16	9	23
68	20	16	9	14	1	29	27	1	25	5	15	11	21	14	5	9	22	26	10	4	21	21	13	19	11	15	6
69	11	14	26	11	18	18	5	18	25	23	23	21	22	1	24	26	18	9	3	1	2	4	12	11	18	7	21
70	30	19	17	11	24	21	8	3	27	26	4	26	22	19	2	6	9	5	21	19	17	11	24	21	17	15	13
71	2	6	27	15	18	30	19	28	29	18	25	4	1	18	4	9	26	28	27	10	19	30	4	13	16	9	27
72	20	27	6	23	4	4	4	26	11	23	1	5	7	13	5	8	25	7	17	4	28	6	18	23	26	10	25
73	27	18	8	5	30	1	15	4	8	16	5	1	23	27	3	25	19	5	22	8	5	30	1	15	18	6	22
74	17	1	18	15	16	19	30	11	9	20	27	20	18	8	9	16	20	19	28	3	9	8	20	15	5	21	8
75	29	3	4	7	29	26	20	6	27	1	28	16	13	9	23	11	17	27	12	9	14	3	14	3	1	9	13
76	10	27	8	3	9	8	20	15	12	26	6	21	2	30	11	10	1	30	11	27	9	11	15	14	13	15	24
77	10	1	2	4	12	11	30	13	8	22	22	23	25	13	22	15	1	14	6	3	9	8	20	15	19	8	6
78	10	4	28	6	18	23	29	4	2	28	16	6	24	9	5	27	29	30	12	9	14	3	14	3	13	15	17
79	26	17	7	28	10	19	11	20	8	4	25	11	29	3	1	22	7	15	21	4	21	21	13	19	12	7	22
80	19	30	4	13	27	17	1	10	27	13	15	9	26	29	21	30	16	23	12	3	9	8	20	15	1	15	10
81	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	27	9	11	15	14	9	7	15
82	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	4	28	6	18	23	26	10	17
83	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	29	22	20	6	9	15	6	28
84	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	9	14	3	14	3	18	6	18
85	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	15	2	16	15	16	8	29	10
86	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	30	11	23	11	1	14	7	2
87	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	20	8	1	27	13	14	9	22
88	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	23	14	6	10	19	14	3	11
89	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	3	9	8	20	15	12	15	6
90	16	4	5	19	9	20	28	22	11	14	8	11	23	9	23	9	21	12	10	1	2	4	12	11	14	21	27
91	9	14	3	14	3	16	29	20	8	17	5	29	28	27	22	1	15	14	10	19	17	11	24	21	12	3	3
92	22	16	11	9	17	21	23	18	28	13	29	23	4	17	9	17	3	11	6	10	19	30	4	13	4	5	3
93	8	24	5	5	8	9	10	19	9	4	8	28	19	14	18	23	2	4	20	27	9	11	15	14	26	10	28
94	15	12	27	27	5	14	11	12	15	5	19	20	11	20	22	12	21	8	11	8	5	30	1	15	5	21	2
95	1	5	12	14	29	20	7	18	22	29	18	3	8	6	2	24	5	26	1	23	11	1	8	13	15	2	10
96	27	27	9	11	15	14	23	6	20	5	17	1	18	21	21	13	26	1	3	4	13	27	17	1	4	15	19
97	25	26	16	22	12	9	11	16	13	22	24	2	28	23	8	17	7	12	10	27	9	11	15	14	9	7	18
98	1	16	26	9	14	17	9	12	7	11	16	20	23	7	10	11	7	18	26	27	5	14	11	12	17	9	17
99	1	6	2	25	19	15	2	18	4	5	18	12	18	5	22	24	16	8	20	18	3	13	1	22	12	14	7
100	3	18	5	23	16	19	3	18	7	13	25	1	18	26	20	5	3	14	19	9	10	19	9	4	12	9	18
101	13	16	7	4	5	15	3	29	10	10	15	15	22	26	20	2	11	15	26	18	3	13	1	22	18	15	5
102	13	23	26	2	17	2	3	24	8	8	2	16	10	16	21	6	18	9	12	4	13	27	17	1	11	8	16
103	25	21	13	12	16	24	22	1	13	15	4	5	21	10	11	27	20	16	21	4	28	6	18	23	8	29	9
104	23	14	6	10	19	28	16	23	9	29	5	4	15	16	5	2	19	1	29	27	5	14	11	12	15	6	29
105	25	24	2	7	16	28	12	15	10	18	13	20	3	5	24	17	13	1	10	18	3	13	1	22	18	6	24
106	16	18	3	13	1	22	6	20	20	20	18	8	25	28	8	13	23	5	25	4	13	27	17	1	5	21	6
107	4	21	21	13	19	23	8	23	16	18	7	22	12	24	4	13	12	15	14	30	11	23	11	1	8	29	29
108	13	26	13	20	8	1	27	13	5	24	10	29	2	28	14	16	17	9	8	20	8	1	27	13	14	5	7
109	16	20	23	25	17	21	3	13	16	11	6	19	10	25	13	3	24	3	23	23	14	6	10	19	8	29	18
110	30	19	17	11	24	21	8	3	27	26	4	26	22	19	2	6	9	5	21	4	21	21	13	19	12	4	13
111	2	6	27	15	18	30	19	28	29	18	25	4	1	18	4	9	26	28	27	1	2	4	12	11	14	12	27
112	20	27	6	23	4	4	4	26	11	23	1	5	7	13	5	8	25	7	17	19	17	11	24	21	1	13	25
113	27	18	8	5	30	1	15	4	8	16	5	1	23	27	3	25	19	5	22	10	19	30	4	13	7	15	22
114	17	1	18	15	16	19	30	11	9	20	27	20	18	8	9	16	20	19	28	4	28	6	18	23	15	19	8
115	29	3	4	7	29	26	20	6	27	1	28	16	13	9	23	11	17	27	12	29	22	20	6	9	26	10	13
116	10	27	8	3	9	8	20	15	12	26	6	21	2	30	11	10	1	30	11	23	11	1	8	13	18	6	24
117	10	1	2	4	12	11	30	13	8	22	22	23	25	13	22	15	1	14	6	15	2	16	15	16	5	21	6
118	10	4	28	6	18	23	29	4	2	28	16	6	24	9	5	27	29	30	12	4	21	21	13	19	5	1	17
119	26	17	7	28	10	19	11	20	8	4	25	11	29	3	1	22	7	15	21	8	5	30	1	15	26	10	22
120	19	30	4	13	27	17	1	10	27	13	15	9	26	29	21	30	16	23	12	19	17	11	24	21	15	6	10